Avaliação de dados de medição — Guia para a expressão de incerteza de medição

Grupo de trabalho para tradução do GUM 2008

Coord.: Antonio Carlos **Baratto** dimci/diter/Inmetro
Jailton Carreteiro Damasceno dimci/dimat/Inmetro
João Antonio Pires Alves dimci/dimec/Inmetro
Jorge **Trota** Filho dimci/dimec/Inmetro
Paulo Roberto Guimaraes **Couto** dimci/dimec/Inmetro
Sérgio Pinheiro de Oliveira dimci/dimec/Inmetro

JCGM 100:2008

GUM 1995 com pequenas correções

Avaliação de dados de medição — Guia para a expressão de incerteza de medição

Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

Primeira edição original: setembro de 2008

Documento produzido pelo Grupo de Trabalho 1 do Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (JCGM/WG 1).

Document produit par le Groupe de travail 1 du Comité commun pour les guides en métrologie (JCGM/WG 1).

Setembro de 2008

JCGM 100:2008

GUM 1995 com pequenas correções

Avaliação de dados de medição — Guia para a expressão de incerteza de medição

Évaluation des données de mesure — Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

Primeira edição do original 2008

Conteúdo

Página

Prefácio da 1ª edição brasileira

> Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832) afirmou certa vez que o tradutor age como "um mediador neste comércio entre as mentes, fazendo de sua ocupação uma alavanca para incrementar esta troca intelectual. Porque, independentemente do que possamos dizer sobre a inadequação das traduções, elas são e sempre serão uma das mais importantes e notáveis ocupações no intercâmbio geral entre os povos." *Referenciado em McFarlane, J. (1953). Modes of Translation. The Durham University Journal. Vol XLV, No 3. June 1953. UK.*

Colocamos à disposição da comunidade científica e técnica brasileira, particularmente daqueles cujo mister envolve a medição, esta presente tradução do GUM 2008: "Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement". Trata-se de trabalho que demandou o esforço de seis pesquisadores do Inmetro por um longo período de mais de um ano, com reuniões semanais. Trabalho, diga-se, desenvolvido concomitantemente com os outros afazeres do dia-a-dia: trabalhos científicos, calibrações, reuniões (muitas), estudo...

Dificilmente um trabalho de tradução é colocado sob perspectivas tão simples como: há uma obra magistralmente escrita cuja tradução compete ser realizada. Em geral haverá, na obra, lacunas, imperfeições, frases obscuras, trechos com duplo (ou múltiplos) sentidos, erros tipográficos, de linguagem, conceituais. Acresce que cada língua tem seus próprios segredos, maneiras particulares de expressão, referências culturais subjacentes, algumas de difícil acesso aos que não a tem como língua nativa. No caso presente somos forçados a reconhecer que o texto original do GUM, em sua maior parte, não padece de muitos dos defeitos acima apontados. Estes existem, mas restritos a não muitas passagens. Quanto ao conteúdo intelectual, entretanto, a parte conceitual tende a se apresentar, por vezes, como extremamente espinhosa.

Ler um texto numa língua particular envolve a dificuldade de decifrar seu conteúdo. Escrever um texto numa língua particular envolve a dificuldade de expressar um conteúdo. O trabalho de tradução envolve as duas dificuldades, com a agravante de que o conteúdo a ser expresso na língua de destino deve ser igual àquele da língua de origem. Daí o adágio italiano: *traduttore, traditore*, isto é, o tradutor é sempre um traidor. Esperamos, sinceramente, que, no nosso caso, o adágio não se nos aplique plenamente!

Num certo sentido queremos não ser lembrados, correndo o risco de não recebermos os louros por tão árduo trabalho. Porque, de fato, não há louros a serem distribuídos. Como sobejamente se sabe, o profissional tradutor somente é percebido quando algum erro, lapso ou deslize é cometido. Caso contrário, ninguém dele se lembrará.

Almejamos fazer uma tradução fiel ao original, buscando sempre uma fidelidade ligada à clareza do conceito mais que à forma. Tentamos, em diversas passagens, ser mais claros e didáticos que o próprio original. Em nenhum momento fugimos de nossa responsabilidade pelo subterfúgio de escrever uma frase ou uma passagem propositadamente indecifrável ou confusa quando confrontados com dificuldades ou impossibilidades momentâneas de decifração do original. Buscamos sempre, nestes casos, opiniões de outros especialistas, cuja contribuição agradecemos. Se mesmo assim alguma passagem não ficou clara isso deve ser imputado exclusivamente às nossas deficiências, mas não à falta de empenho.

Procuramos manter ao longo de todo o trabalho uma formatação editorial tão próxima da original quanto possível. O conteúdo e a formatação de cada página da versão brasileira são praticamente iguais ao conteúdo e à formatação do texto em inglês. O uso da palavra praticamente se deve ao fato de que alguns parágrafos se contêm em duas páginas adjacentes, com o que a quebra de página pode se dar, em cada versão, em pontos diferentes do texto.

O GUM2008 é uma edição em que foram feitas algumas correções em relação à edição já emendada de 1995. Sendo assim, o texto original é, em sua maior parte, o mesmo da edição antiga. O que nos propusemos neste trabalho foi uma tradução a partir do original em inglês. Não obstante isso, alguns trechos mais simples do texto traduzido são, forçosamente, idênticos a trechos correspondentes da última edição brasileira de 2003. Consultamos extensivamente o texto da tradução anterior para confrontar as opções, o que muito nos auxiliou em diversas passagens. Inclusive, quando a(s) proposta(s) alternativa(s) não se mostrava(m) inequivocamente melhor(es), preferimos optar pelo texto da edição de 2003. Assim, nas partes em que o texto traduzido da presente versão é idêntico ao texto traduzido anterior, os méritos devem ser conferidos aos tradutores de então; em todas as partes, idênticas ou divergentes, os eventuais deméritos devem ser consignados aos presentes tradutores.

Os tradutores

Este *Guia* estabelece regras gerais para avaliar e expressar incerteza em medição, as quais foram planejadas para serem aplicadas a um largo espectro de medições. A base deste *Guia* é a Recomendação 1 (CI-1981) do Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM) e a recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas. O Grupo de Trabalho foi convocado pelo Birô Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) em resposta a uma solicitação do CIPM. A Recomendação do CIPM é a única recomendação relacionada à expressão de incerteza em medição adotada por uma organização intergovernamental.

Este *Guia* foi preparado por um grupo de trabalho conjunto formado por especialistas nomeados pelo BIPM, pela Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC), pela Organização Internacional para a Normalização (ISO), e pela Organização Internacional de Metrologia Legal (OIML).

Deram suporte para o desenvolvimento deste *Guia*, o qual é em seu nome publicado, as sete organizações* a seguir nomeadas:

BIPM: Bureau International des Poids et Mesures (Birô Internacional de Pesos e Medidas)

IEC: International Electrotechnical Commission (Comissão Eletrotécnica Internacional)

IFCC: International Federation of Clinical Chemistry** (Federação Internacional de Química Clínica)

ISO: International Organization for Standardization (Organização Internacional para a Normalização)

IUPAC: International Union of Pure and Applied Chemistry** (União Internacional de Química Pura e Aplicada)

IUPAP: International Union of Pure and Applied Physics** (União Internacional de Física Pura e Aplicada)

OlML: International Organization of Legal Metrology (Organização Internacional de Metrologia Legal)

Os usuários deste *Guia* são convidados a enviar seus comentários e pedidos de esclarecimento para qualquer uma das sete organizações de suporte, cujos endereços são dados no verso da capa***.

*** Nota de rodapé para a versão 2008:**
Em 2005, a International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC) juntou-se oficialmente às sete organizações internacionais fundadoras.

**** Nota de rodapé para a versão 2008:**
Os nomes dessas três organizações mudaram desde 1995. São eles agora:
IFCC: International Federation for Clinical Chemistry and Laboratory Medicine
IUPAC: International Organization for Pure and Applied Chemistry
IUPAP: International Organization for Pure and Applied Physics.

***** Nota de rodapé para a versão 2008:**
Indicações para os endereços das oito organizações envolvidas presentemente no JCGM (Comitê Conjunto para Guias em Metrologia) são dadas em http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm.

Prefácio

Em 1977, reconhecendo a falta de consenso internacional sobre a expressão da incerteza de medição, a maior autoridade mundial em metrologia, o Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM), requereu ao Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) o tratamento do problema em conjunto com os laboratórios nacionais de metrologia e a elaboração de uma proposta.

O BIPM preparou um questionário detalhado cobrindo os assuntos envolvidos e o distribuiu para 32 laboratórios nacionais de metrologia sabidamente interessados no assunto (e, apenas para informação, para cinco organizações internacionais). Pelo início de 1979 tinham sido recebidas respostas de 21 laboratórios [1].1) Praticamente todos acreditavam que era importante chegar a um procedimento acordado internacionalmente para expressar incerteza de medição e para combinar componentes individuais de incerteza em uma incerteza total única. Não se evidenciou, contudo, um consenso quanto ao método a ser usado. O BIPM convocou, então, uma reunião com o propósito de se chegar a um procedimento uniforme e de aceitação geral para especificação de incerteza; estiveram presentes especialistas de 11 laboratórios nacionais de metrologia. Este Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas produziu a Recomendação INC-1 (1980), Expressão de Incertezas Experimentais [2]. O CIPM aprovou a Recomendação em 1981 [3] e ratificou-a em 1986 [4].

O CIPM transferiu a tarefa de desenvolver um guia detalhado com base na Recomendação do Grupo de Tabalho (que é uma breve descrição, não uma prescrição detalhada) para a International Organization for Standardization (ISO), já que ela poderia melhor refletir as necessidades oriundas dos amplos interesses da indústria e do comércio.

A responsabilidade foi conferida ao Grupo Consultivo sobre Metrologia (TAG 4) da ISO, já que uma de suas atribuições é coordenar o desenvolvimento de diretrizes sobre tópicos relacionados à medição, de interesse comum à ISO e às seis organizações que participam com a ISO no trabalho do TAG 4: a International Electrotechnical Commission (IEC), parceira da ISO na normalização mundial; o CIPM e a International Organization of Legal Metrology (OIML), as duas organizações mundiais de metrologia; a International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC) e a International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP), as duas uniões internacionais que representam a química e a física; e a International Federation of Clinical Chemistry (IFCC).)

O TAG 4, por seu turno, constituiu o Grupo de Trabalho 3 (ISO/TAG 4/WG 3), composto por especialistas designados pelo BIPM, IEC, ISO, e OIML, e referendados pelo Presidente do TAG 4. Foram estabelecidos os seguintes termos de referência:

Desenvolver um documento orientativo com base na recomendação do Grupo de Trabalho do BIPM sobre a Declaração de Incertezas que forneça regras sobre a expressão de incerteza de medição para ser usado em normalização, calibração, acreditação de laboratórios e serviços de metrologia;

O propósito de tal orientação é

— promover completa informação sobre como se chega a uma declaração de incerteza;

— fornecer uma base para a comparação internacional de resultados de medição.

---

1) Ver a Bibliografia

* **Nota de rodapé para a versão 2008:**

Na produção desta versão 2008 do GUM, correções necessárias apenas para a versão impressa de 1995 foram introduzidas pelo GT 1 do JCGM. Essas correções ocorrem nos itens 4.2.2, 4.2.4, 5.1.2, B.2.17, C.3.2, C.3.4, E.4.3, H.4.3, H.5.2.5 e H.6.2.

0 Introdução

0.1 Quando se relata o resultado de medição de uma grandeza física deve-se sempre dar alguma indicação quantitativa da qualidade do resultado, de forma que aqueles que o utilizam possam avaliar sua confiabilidade. Sem essa indicação, resultados de medição não podem ser comparados, seja entre eles mesmos ou com valores de referência fornecidos numa especificação ou numa norma. É, portanto, necessário que exista um procedimento que seja de pronta aplicação, fácil compreensão e ampla aceitação para caracterizar a qualidade de um resultado de uma medição, isto é, para avaliar e expressar sua *incerteza*.

0.2 O conceito de *incerteza* como um atributo quantificável é relativamente novo na história da medição, embora *erro* e *análise de erro* tenham sido, há muito, uma parte da prática da ciência da medição ou metrologia. É agora amplamente reconhecido que, quando todos os componentes de erro conhecidos ou presumidos tenham sido avaliados e as correções adequadas tenham sido aplicadas, ainda permanece uma incerteza sobre quão correto é o resultado declarado, isto é, uma dúvida acerca de quão corretamente o resultado da medição representa o valor da grandeza que está sendo medida.

0.3 Da mesma forma como o uso quase universal do Sistema Internacional de Unidades (SI) trouxe coerência a todas as medições científicas e tecnológicas, um consenso mundial sobre a avaliação e expressão da incerteza de medição permitiria que o significado de um vasto espectro de resultados de medições na ciência, engenharia, comércio, indústria e regulamentação, fosse prontamente compreendido e apropriadamente interpretado. Nesta era de mercado global, é imperativo que o método para avaliar e expressar incerteza seja uniforme em todo o mundo, de forma tal que as medições realizadas em diferentes países possam ser facilmente comparadas.

0.4 O método ideal para avaliar e expressar a incerteza do resultado de uma medição deve ser:

— *universal*: o método deve ser aplicável a todas as espécies de medição e a todos os tipos de dados de entrada usados nas medições. A grandeza real usada para expressar a incerteza deve ser:

— *internamente consistente*: deve ser diretamente derivável dos componentes que para ela contribuem, assim como ser independente de como estes componentes estejam agrupados, ou da decomposição de componentes em subcomponentes;

— *transferível*: deve ser possível usar diretamente a incerteza avaliada para um resultado como um componente na avaliação da incerteza de outra medição na qual o primeiro resultado é utilizado.

Além disso, em muitas aplicações industriais e comerciais, assim como nas áreas da saúde e segurança, é freqüentemente necessário fornecer um intervalo em torno do resultado de medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição de valores, que poderiam razoavelmente ser atribuídos à grandeza sujeita à medição. Assim, o método ideal para avaliar e expressar incerteza de medição deve ser capaz de fornecer prontamente tal intervalo, em particular um intervalo com probabilidade da abrangência ou nível da confiança que, de uma forma realista, corresponda ao nível requerido.

0.5 A abordagem sobre a qual está baseado este documento indicativo é aquela delineada na Recomendação INC-1 (1980) [2] do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas, o qual foi convocado a ser reunir pelo BIPM por solicitação do CIPM (ver o Prefácio). Essa abordagem, cuja justificativa é discutida no Anexo E, satisfaz a todos os requisitos anteriormente enumerados. Este não é o caso da maioria dos outros métodos em uso corrente. A Recomendação INC-1 (1980) foi aprovada e ratificada pelo CIPM em suas próprias Recomendações 1 (CI-1981) [3] e 1 (CI-1986) [4]; as traduções destas Recomendações do CIPM estão reproduzidas no Anexo A (ver A.2 e A.3, respectivamente). Uma vez que a Recomendação INC-1 (1980) é o fundamento sobre o qual este documento se baseia, sua tradução para a língua portuguesa está reproduzida em 0.7 e o texto em francês, que é o oficial, está reproduzido em A.1.

0.6 Um resumo sucinto do procedimento especificado neste documento indicativo para avaliação e expressão de incerteza de medição é dado no Capítulo 8, e vários exemplos são apresentados em detalhe no Anexo H. Outros anexos tratam de termos gerais em metrologia (Anexo B); termos e conceitos básicos de estatística (Anexo C); valor "verdadeiro", erro e incerteza (Anexo D); sugestões práticas para avaliação de componentes de incerteza (Anexo F); graus de liberdade e níveis da confiança (Anexo G); os principais símbolos matemáticos utilizados neste documento (Anexo J); e referências bibliográficas (Bibliografia). Um índice alfabético conclui o documento.

0.7 Recomendação INC-1 (1980) Expressão de incertezas experimentais

1. A incerteza em um resultado de uma medição geralmente consiste de vários componentes que podem ser agrupados em duas categorias de acordo com o método utilizado para estimar seu valor numérico:

   A. aqueles que são avaliados por métodos estatísticos;

   B. aqueles que são avaliados por outros meios.

   Nem sempre há uma simples correspondência entre a classificação nas categorias A ou B e o caráter "aleatório" ou "sistemático" utilizado anteriormente para classificar as incertezas. A expressão "incerteza sistemática" pode ser mal interpretada, devendo ser evitada.

   Toda descrição detalhada da incerteza deve consistir de uma lista completa de seus componentes, especificando, para cada um, o método utilizado para lhe atribuir um valor numérico.

2. Os componentes classificados na categoria A são caracterizados pelas variâncias estimadas s_i^2, (ou pelos "desvios-padrão" estimados s_i) e pelo número de graus de liberdade, ν_i. Onde apropriado, as covariâncias devem ser fornecidas.

3. Os componentes classificados na categoria B devem ser caracterizados pelos termos u_j^2, que podem ser considerados como aproximações das variâncias correspondentes, cuja existência é suposta. Os termos u_j^2 podem ser tratados como variâncias e os termos u_j, como desvios padrão. Onde apropriado, as covariâncias devem ser tratadas de modo similar.

4. A incerteza combinada deve ser caracterizada pelo valor numérico obtido aplicando-se o método usual para a combinação de variâncias. A incerteza combinada e seus componentes devem ser expressos na forma de "desvios-padrão".

5. Se, para algumas aplicações, for necessário multiplicar a incerteza combinada por um fator, visando à obtenção de uma incerteza global, o valor do fator multiplicador deve ser sempre declarado.

Avaliação de dados de medição — Guia para a expressão da incerteza de medição

1 Finalidade

1.1 Este *Guia* estabelece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição, regras essas que podem ser seguidas em vários níveis de exatidão e em muitos campos de atuação, do chão de fábrica à pesquisa fundamental. Os princípios deste *Guia* são aplicáveis, portanto, a um amplo espectro de medições, incluindo aquelas necessárias para:

— manter o controle da qualidade e a garantia da qualidade na produção;

— respeitar e fazer cumprir leis e regulamentos;

— conduzir pesquisa básica, pesquisa aplicada e desenvolvimento na ciência e na engenharia;

— calibrar padrões e instrumentos e executar ensaios no contexto de um sistema nacional de medição de forma a obter rastreabilidade a padrões nacionais;

— desenvolver, manter e comparar padrões físicos de referência, nacionais e internacionais, incluindo materiais de referência.

1.2 Este *Guia* está primariamente relacionado com a expressão da incerteza de medição de uma grandeza física bem definida - o mensurando - que pode ser caracterizada por um valor essencialmente único. Se o fenômeno de interesse pode ser representado somente como uma distribuição de valores ou é dependente de um ou mais parâmetros, tal como o tempo, então os mensurandos requeridos para sua descrição são o conjunto de grandezas que descrevem a distribuição ou a dependência.

1.3 Este *Guia* é também aplicável à avaliação e expressão da incerteza associada ao projeto conceitual e à análise teórica de experimentos, de métodos de medição e de componentes e sistemas complexos. Uma vez que o resultado de uma medição e sua incerteza podem ser conceituais e baseados inteiramente em dados hipotéticos, o termo “resultado de uma medição”, tal como é usado neste *Guia*, deve ser interpretado neste sentido mais amplo.

1.4 Este *Guia* fornece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição em vez de instruções detalhadas sobre tecnologias específicas. Além disso, ele não discute como a incerteza de um determinado resultado de medição, uma vez avaliada, pode ser utilizada para diferentes finalidades, como, por exemplo, tirar conclusões sobre a compatibilidade daquele resultado com outros resultados similares, estabelecer limites de tolerância em um processo de fabricação, ou decidir se uma determinada linha de ação poderá ser adotada com segurança. Pode, portanto, ser necessário desenvolver normas específicas, baseadas neste *Guia*, que tratem dos problemas peculiares aos campos específicos de medição ou às várias utilizações das expressões quantitativas de incerteza.* Essas normas podem ser versões simplificadas deste *Guia*, mas devem incluir os detalhes apropriados ao nível de exatidão e complexidade das medições e utilizações visadas.

NOTA Pode haver situações nas quais se acredita que o conceito de incerteza de medição não seja plenamente aplicável, tal como quando se determina a precisão de um método de ensaio (ver, por exemplo, Referência [5]).

* **Nota de rodapé para a versão 2008:**

Desde a publicação inicial deste *Guia* foram já publicados diversos documentos de aplicação geral e específica dele derivados. Para fins de informação, compilações não exatamente completas desses documentos podem ser encontradas em http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg1_bibliography.html

2 Definições

2.1 Termos gerais de metrologia

As definições de vários termos metrológicos gerais e relevantes para este *Guia*, tais como “grandeza mensurável”, “mensurando” e “erro de medição”, são dadas no Anexo B. Essas definições são extraídas do *Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia* (abreviado para VIM)* [6]. Adicionalmente, o Anexo C fornece as definições de vários termos estatísticos básicos extraídos principalmente da Norma Internacional ISO-3534-1 [7]. Quando um desses termos metrológicos ou estatísticos (ou um termo estreitamente relacionado) é usado no texto pela primeira vez, a partir do Capítulo 3, ele é impresso em negrito e o número do item no qual é definido é dado entre parênteses.

Por sua importância no contexto deste *Guia*, a definição do termo metrológico geral “incerteza de medição” é dada tanto no Anexo B como em 2.2.3. As definições dos mais importantes termos específicos deste *Guia* são apresentadas de 2.3.1 a 2.3.6. Em todos esses itens, e nos Anexos B e C, o uso de parênteses em certas palavras de alguns termos significa que as mesmas podem ser omitidas se tal omissão não causar equívoco.

2.2 O termo "incerteza"

O conceito de incerteza é discutido mais amplamente no Capítulo 3 e no Anexo D.

2.2.1 A palavra “incerteza” significa dúvida, e assim, no sentido mais amplo, “incerteza de medição” significa dúvida acerca da validade do resultado de uma medição. Devido à falta de palavras diferentes para este *conceito geral* de incerteza, e para as grandezas específicas que proporcionam *medidas quantitativas* do conceito, como, por exemplo, o desvio-padrão, é necessário utilizar a palavra “incerteza” nestas duas acepções diferentes.

2.2.2 Neste *Guia*, a palavra “incerteza”, sem adjetivos, refere-se tanto ao conceito geral de incerteza como a qualquer uma ou a todas as medidas quantitativas deste conceito. Quando uma medida específica é visada, são usados os adjetivos apropriados.

2.2.3 A definição formal do termo “incerteza de medição” desenvolvida para ser usada neste Guia e no VIM [6] (VIM:1993, definição 3.9) é a seguinte:

incerteza (de medição)
parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.

NOTA 1 O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio-padrão (ou um múltiplo dele), ou a metade de um intervalo correspondente a um nível da confiança estabelecido.

NOTA 2 Incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados de séries de medições e podem ser caracterizados por desvios-padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios-padrão, são avaliados por meio de distribuições de probabilidade supostas, baseadas na experiência ou em outras informações.

NOTA 3 Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurado, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

2.2.4 A definição de incerteza de medição dada em 2.2.3 é uma definição operacional e focaliza o resultado da medição e sua incerteza avaliada. Entretanto, ela não é inconsistente com outros conceitos de incerteza de medição, tais como

---

* **Nota de rodapé para a versão 2008:**

A terceira edição do vocabulário foi publicada em 2008 [no Brasil, em 2009], sob o título JCGM 200:2008, *International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)* [no Brasil: *Vocabulário Internacional de Metrologia — Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM)*].

— uma medida do possível erro no valor estimado do mensurando, tal como proporcionado pelo resultado de uma medição;

— uma estimativa caracterizando a faixa de valores na qual o valor verdadeiro de um mensurando se encontra (VIM: 1984, definição 3.09).

Embora estes dois conceitos tradicionais sejam válidos como ideais, eles focalizam grandezas *desconhecíveis*: o "erro" do resultado de uma medição e o "valor verdadeiro" do mensurando (em contraste com seu valor estimado), respectivamente. Não obstante, qualquer que seja o *conceito* de incerteza adotado, um componente de incerteza é sempre *avaliado* utilizando-se os mesmos dados e informações relacionadas (ver também E.5).

2.3 Termos específicos para este *Guia*

Em geral, termos específicos para este *Guia* são definidos no texto quando introduzidos pela primeira vez. Entretanto, as definições dos termos mais importantes são aqui fornecidas para fácil referência.

NOTA Discussões adicionais relacionadas a estes termos podem ser encontradas como se segue: para 2.3.2, ver 3.3.3 e 4.2; para 2.3.3, ver 3.3.3 e 4.3; para 2.3.4, ver Capítulo 5 e Equações (10) e (13); e para 2.3.5 e 2.3.6, ver Capítulo 6.

2.3.1
incerteza-padrão
incerteza do resultado de uma medição expressa como um desvio-padrão

2.3.2
avaliação do Tipo A (de incerteza)
método de avaliação de incerteza pela análise estatística de séries de observações

2.3.3
avaliação do Tipo B (de incerteza)
método de avaliação de incerteza por outros meios que não a análise estatística de séries de observações

2.3.4
incerteza-padrão combinada
incerteza-padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido por meio dos valores de várias outras grandezas, sendo igual à raiz quadrada positiva de uma soma de termos, que constituem as variâncias ou covariâncias destas outras grandezas, ponderadas de acordo com o quanto o resultado da medição varia com mudanças nestas grandezas

2.3.5
incerteza expandida
quantidade que define um intervalo em torno do resultado de uma medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando

NOTA 1 A fração pode ser vista como a probabilidade de abrangência ou nível da confiança do intervalo.

NOTA 2 Para associar um nível da confiança específico ao intervalo definido pela incerteza expandida são necessárias suposições explícitas ou implícitas com respeito à distribuição de probabilidade caracterizada pelo resultado da medição e sua incerteza-padrão combinada. O nível da confiança que pode ser atribuído a este intervalo somente será conhecido na medida em que tais suposições possam ser justificadas.

NOTA 3 Incerteza expandida é denominada *incerteza global* no parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980).

2.3.6
fator de abrangência
fator numérico utilizado como um multiplicador da incerteza-padrão combinada de modo a obter uma incerteza expandida

NOTA um fator de abrangência, k, está tipicamente na faixa de 2 a 3.

3 Conceitos básicos

Discussões adicionais dos conceitos básicos podem ser encontradas no Anexo D, que focaliza as idéias de valor "verdadeiro", erro e incerteza e inclui ilustrações gráficas destes conceitos, e no Anexo E, que explora a motivação e a base estatística da Recomendação INC-1 (1980) sobre a qual se fundamenta este *Guia*. O Anexo J é um glossário dos principais símbolos matemáticos usados neste *Guia*.

3.1 Medição

3.1.1 O objetivo de uma **medição** (B.2.5) é determinar o **valor** (B.2.2) do **mensurando** (B.2.9), isto é, o valor da **grandeza específica** (B.2.1, Nota 1) a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** (B.2.7) e do **procedimento de medição** (B.2.8).

NOTA O termo "valor verdadeiro" (ver Anexo D) não é usado neste *Guia* pelas razões dadas em D.3.5; os termos "valor de um mensurando"(ou de uma grandeza) e "valor verdadeiro de um mensurando" (ou de uma grandeza) são tidos como equivalentes.

3.1.2 Em geral, o **resultado de uma medição** (B.2.11) é somente uma aproximação ou **estimativa** (C.2.26) do valor do mensurando e, assim, só é completo quando acompanhado pela declaração da **incerteza** (ver B.2.18) dessa estimativa.

3.1.3 Na prática, o grau de especificação ou definição necessário para o mensurando é ditado pela **exatidão de medição** requerida (B.2.14). O mensurando deve ser definido com completeza suficiente relativa à exatidão requerida, de modo que, para todos os fins práticos associados com a medição, seu valor seja único. É nesse sentido que a expressão "valor do mensurando" é usada neste *Guia*.

EXEMPLO Se o comprimento de uma barra de aço de um metro (nominal) deve ser determinado com exatidão micrométrica, sua especificação deverá incluir a temperatura e a pressão nas quais o comprimento é definido. Assim, o mensurando deve ser especificado como, por exemplo, o comprimento da barra a 25,00 ºC* e 101 325 Pa (e mais quaisquer outros parâmetros definidos julgados necessários, tal como a maneira pela qual a barra será apoiada). Entretanto, se o comprimento tiver de ser determinado apenas com exatidão milimétrica, sua especificação não requererá uma definição de temperatura ou pressão ou de um valor para qualquer outro parâmetro de definição.

NOTA A definição incompleta do mensurando pode ser a causa de um componente de incerteza suficientemente grande que deva ser incluído na avaliação da incerteza do resultado da medição (ver D.1.1, D.3.4 e D.6.2).

3.1.4 Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries de observações obtidas sob **condições de repetibilidade** (B.2.15, Nota 1).

3.1.5 Supõe-se que as variações em observações repetidas surjam porque as **grandezas de influência** (B.2.10) que podem afetar o resultado de medição não são mantidas completamente constantes.

3.1.6 O modelo matemático da medição, que transforma o conjunto de observações repetidas no resultado de medição, é de importância crítica porque, além das observações, ele geralmente inclui várias grandezas de influência que são conhecidas de forma inexata. Essa falta de conhecimento contribui para a incerteza do resultado da medição, assim como também contribuem as variações das observações repetidas e qualquer incerteza associada ao próprio modelo matemático.

3.1.7 Este *Guia* trata o mensurando como um escalar (uma grandeza única). A extensão a um conjunto de mensurandos relacionados, determinados simultaneamente na mesma medição, requer a substituição do mensurando escalar e de sua **variância** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) por um mensurando vetorial e por uma **matriz de covariância** (C.3.5). Tal substituição é considerada neste *Guia* apenas nos exemplos (ver H.2, H.3 e H.4).

---

* **Nota de rodapé para a versão 2008:**

De acordo com a Resolução 10 do 22º CGPM (2003) "... o símbolo para o marcador decimal deve ser o ponto na linha ou a vírgula na linha ...". O JCGM decidiu adotar o ponto na linha em seus documentos em inglês. Entretanto, neste documento, a vírgula decimal foi mantida para manter a consistência com a versão impressa de 1995.

3.2 Erros, efeitos e correções

3.2.1 Em geral, uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** (B.2.19) no resultado da medição. Tradicionalmente, um erro é visto como tendo dois componentes, a saber, um componente **aleatório** (B.2.21) e um componente **sistemático** (B.2.22).

NOTA Erro é um conceito idealizado e os erros não podem ser conhecidos exatamente.

3.2.2 O erro aleatório presumivelmente se origina de variações temporais ou espaciais, estocásticas ou imprevisíveis, de grandezas de influência. Os efeitos de tais variações, daqui para a frente denominados *efeitos aleatórios*, são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. Embora não seja possível compensar o erro aleatório de um resultado de medição, ele pode geralmente ser reduzido aumentando-se o número de observações; sua **esperança** ou **valor esperado** (C.2.9, C.3.1) é zero.

NOTA 1 O desvio-padrão experimental da média aritmética ou média de uma série de observações (ver 4.2.3) *não* é o erro aleatório da média, embora ele assim seja designado em algumas publicações. Ele é, em vez disso, uma medida da *incerteza* da média devida a efeitos aleatórios. O valor exato do erro na média, que se origina destes efeitos, não pode ser conhecido.

NOTA 2 Neste *Guia* toma-se muito cuidado em se distinguir entre os termos “erro” e “incerteza”. Eles não são sinônimos, mas representam conceitos completamente diferentes; eles não devem ser confundidos um com o outro, nem ser mal empregados.

3.2.3 O erro sistemático, assim como o erro aleatório, não pode ser eliminado, porém ele também, freqüentemente, pode ser reduzido. Se um erro sistemático se origina de um efeito reconhecido de uma grandeza de influência em um resultado de medição, daqui para diante denominado como *efeito sistemático*, o efeito pode ser quantificado e, se for significativo com relação à exatidão requerida da medição, uma **correção** (B.2.23) ou **fator de correção** (B.2.24) pode ser aplicado para compensar o efeito. Supõe-se que, após esta correção, a esperança ou valor esperado do erro provocado por um efeito sistemático seja zero.

NOTA A incerteza de uma correção aplicada a um resultado de medição para compensar um efeito sistemático *não é o erro sistemático* no resultado de medição. Este efeito sistemático é freqüentemente denominado tendência, e também, algumas vezes, chamado efeito de tendência. É uma medida da *incerteza* do resultado devido ao conhecimento incompleto do valor requerido da correção. O erro originado da compensação imperfeita de um efeito sistemático não pode ser exatamente conhecido. Os termos “erro” e “incerteza” devem ser usados apropriadamente e deve-se tomar cuidado em se distinguir um do outro.

3.2.4 Supõe-se que o resultado de uma medição tenha sido corrigido para todos os efeitos sistemáticos reconhecidos como significativos e que todo esforço tenha sido feito para identificar tais efeitos.

EXEMPLO Uma correção devida à impedância finita de um voltímetro usado para determinar a diferença de potencial (o mensurando) por meio de um resistor de alta impedância é aplicada para reduzir o efeito sistemático no resultado da medição proveniente do efeito de carga do voltímetro. Entretanto, os valores das impedâncias do voltímetro e do resistor, que são usados para estimar o valor da correção e são obtidos a partir de outras medidas, são, eles mesmos, incertos. Essas incertezas são usadas para avaliar o componente de incerteza da determinação da diferença de potencial originada da correção e, assim, do efeito sistemático devido à impedância finita do voltímetro.

NOTA 1 Frequentemente, os instrumentos e sistemas de medição são ajustados ou calibrados utilizando-se padrões de medição e materiais de referência para eliminar os efeitos sistemáticos; entretanto, as incertezas associadas a esses padrões e materiais ainda devem ser levadas em conta.

NOTA 2 O caso em que uma correção para um efeito sistemático significativo conhecido não é aplicada é discutido na Nota do item 6.3.1 e em F.2.4.5.

3.3 Incerteza

3.3.1 A incerteza do resultado de uma medição reflete a falta de conhecimento exato do valor do mensurando (ver 2.2). O resultado de uma medição, após correção dos efeitos sistemáticos reconhecidos, é ainda e tão somente uma *estimativa* do valor do mensurando oriunda da incerteza proveniente dos efeitos aleatórios e da correção imperfeita do resultado para efeitos sistemáticos.

NOTA O resultado de uma medição (após correção) pode, sem que se perceba, estar muito próximo do valor do mensurando (e, assim, ter um erro desprezível), muito embora possa ter uma incerteza grande. Portanto, a incerteza do resultado de uma medição não deve ser confundida com o erro desconhecido remanescente.

3.3.2 Na prática, existem muitas fontes possíveis de incerteza em uma medição, incluindo:

a) definição incompleta do mensurando;

b) realização imperfeita da definição do mensurando;

c) amostragem não-representativa – a amostra medida pode não representar o mensurando definido;

d) conhecimento inadequado dos efeitos das condições ambientais sobre a medição ou medição imperfeita das condições ambientais;

e) erro de tendência pessoal na leitura de instrumentos analógicos;

f) resolução finita do instrumento ou limiar de mobilidade;

g) valores inexatos dos padrões de medição e materiais de referência;

h) valores inexatos de constantes e de outros parâmetros obtidos de fontes externas e usados no algoritmo de redução de dados;

i) aproximações e suposições incorporadas ao método e procedimento de medição;

j) variações nas observações repetidas do mensurando sob condições aparentemente idênticas.

Essas fontes não são necessariamente independentes e algumas das fontes de a) a i) podem contribuir para a fonte j). Naturalmente, um efeito sistemático não reconhecido não pode ser levado em consideração na avaliação da incerteza do resultado de uma medição, porém contribui para seu erro.

3.3.3 A Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas agrupa os componentes da incerteza em duas categorias baseadas no seu método de avaliação, “A” e “B” (ver 0.7, 2.3.2 e 2.3.3). Estas categorias se aplicam à *incerteza* e não são substitutas para os termos “aleatório” e “sistemático”. A incerteza de uma correção de um efeito sistemático conhecido pode, em alguns casos, ser obtida por uma avaliação do Tipo A, enquanto que, em outros casos, por uma avaliação do Tipo B, podendo-se obter, do mesmo modo, a incerteza que caracteriza um efeito aleatório.

NOTA Em algumas publicações, os componentes da incerteza são categorizados como “aleatório” e “sistemático” e são associados com erros provenientes de efeitos aleatórios e de efeitos sistemáticos conhecidos, respectivamente. Tal categorização de componentes de incerteza pode se tornar ambígua quando aplicada genericamente. Por exemplo, um componente “aleatório” de incerteza em uma medição pode se tornar um componente “sistemático” da incerteza em outra medição na qual o resultado da primeira medição é usado como dado de entrada. Categorizando os *métodos* de avaliação dos componentes da incerteza, em vez de fazê-lo com os próprios *componentes*, evita-se tal ambiguidade. Ao mesmo tempo, isto não impede designar componentes individuais que tenham sido avaliados pelos dois diferentes métodos em grupos distintos, a serem usados para uma finalidade em particular (ver 3.4.3).

3.3.4 O propósito da classificação Tipo A e Tipo B é indicar as duas maneiras diferentes de avaliar os componentes da incerteza e serve apenas para discussão; a classificação não se propõe a indicar que haja qualquer diferença na natureza dos componentes resultantes dos dois tipos de avaliação. Ambos os tipos de avaliação são baseados em **distribuições de probabilidade** (C.2.3) e os componentes de incerteza resultantes de cada tipo são quantificados por variâncias ou desvios-padrão.

3.3.5 A variância estimada u^2, que caracteriza um componente de incerteza obtido de uma avaliação do Tipo A, é calculada a partir de uma série de observações repetidas, e é a conhecida variância s^2 estatisticamente estimada (ver 4.2). O **desvio-padrão** estimado (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u, a raiz quadrada positiva de u^2, é portanto $u = s$ e, por conveniência, é por vezes denominado *incerteza-padrão do Tipo A*. A variância estimada para um componente de incerteza obtido por uma avaliação do Tipo B,

u^2, é avaliada usando-se o conhecimento disponível (ver 4.3); e o desvio-padrão estimado u é, por vezes, denominado *incerteza-padrão do Tipo B*.

Assim, uma incerteza-padrão do Tipo A é obtida a partir de uma **função densidade de probabilidade** (C.2.5) derivada de uma **distribuição de frequência observada** (C.2.18), enquanto que uma incerteza-padrão do Tipo B é obtida de uma suposta função densidade de probabilidade, baseada no grau de credibilidade de que um evento vá ocorrer [frequentemente chamada **probabilidade** (C.2.1) subjetiva]. Ambos os enfoques empregam interpretações reconhecidas de probabilidade.

NOTA Uma avaliação do Tipo B de um componente de incerteza é usualmente baseada em um conjunto de informações comparativamente confiáveis (ver 4.3.1).

3.3.6 A incerteza-padrão do resultado de uma medição, quando este resultado é obtido de valores de várias outras grandezas, é denominada *incerteza-padrão combinada* e designada por u_c. Ela é o desvio-padrão estimado associado com o resultado e é igual à raiz quadrada positiva da variância combinada, obtida a partir de todos os componentes da variância e **covariância** (C.3.4), independente de como tenham sido avaliados, usando o que é denominado neste *Guia* como *lei de propagação de incertezas* (ver Capítulo 5).

3.3.7 Para satisfazer as necessidades de algumas aplicações industriais e comerciais, assim como para atender a requisitos nas áreas de saúde e segurança, pode ser obtida uma *incerteza expandida* U pela multiplicação da incerteza-padrão combinada u_c por um fator de abrangência k. A finalidade pretendida para U é fornecer um intervalo em torno do resultado de uma medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição de valores que poderiam razoavelmente ser atribuídos ao mensurando. A escolha do fator k, o qual está geralmente na faixa de 2 a 3, é baseada na probabilidade de abrangência ou nível da confiança requerido do intervalo (ver Capítulo 6).

NOTA O fator de abrangência k deve sempre ser declarado de forma que a incerteza-padrão da grandeza medida possa ser recuperada para uso no cálculo da incerteza-padrão combinada de outros resultados de medição que possam depender dessa grandeza.

3.4 Considerações práticas

3.4.1 Se todas as grandezas das quais o resultado de uma medição depende forem variadas, sua incerteza poderá ser calculada por meios estatísticos. Entretanto, uma vez que isso é raramente possível na prática, devido a tempo e recursos limitados, a incerteza de um resultado de medição é geralmente avaliada utilizando-se um modelo matemático da medição e a lei de propagação da incerteza. Assim, está implícita neste *Guia* a suposição de que uma medição pode ser modelada matematicamente até o grau imposto pela exatidão requerida na medição.

3.4.2 Uma vez que o modelo matemático pode ser incompleto, todas as grandezas relevantes devem ser variadas até a maior extensão prática possível de modo que a avaliação da incerteza possa ser baseada, tanto quanto possível, nos dados observados. Sempre que factível, o uso de modelos empíricos da medição fundamentados em dados quantitativos de longo prazo e o uso de padrões de verificação e gráficos de controle que possam indicar se uma medição está sob controle estatístico devem ser parte do esforço de obtenção de avaliações confiáveis de incerteza. O modelo matemático deve ser revisado sempre que os dados observados, incluindo o resultado de determinações independentes do mesmo mensurando, demonstrarem que ele está incompleto. Um experimento bem projetado pode facilitar sobremaneira avaliações confiáveis da incerteza e é uma parte importante da arte de medição.

3.4.3 De forma a decidir se um sistema de medição está funcionando adequadamente, a variabilidade experimentalmente observada de seus valores de saída, conforme medida pelo seu desvio-padrão observado, é frequentemente comparada com o desvio-padrão previsto, obtido pela combinação dos vários componentes da incerteza que caracterizam a medição. Em tais casos, somente aqueles componentes (obtidos de avaliações do Tipo A ou do Tipo B) que podem contribuir para a variabilidade experimentalmente observada destes valores de saída devem ser considerados.

NOTA Tal análise pode ser facilitada reunindo-se aqueles componentes que contribuem para a variabilidade, e aqueles que não o fazem, em dois grupos separados e adequadamente rotulados.

3.4.4 Em alguns casos a incerteza de uma correção para um efeito sistemático não precisa ser incluída na avaliação da incerteza de um resultado de medição. Embora a incerteza tenha sido avaliada, ela pode ser ignorada se sua contribuição para a incerteza-padrão combinada do resultado de medição é insignificante. Se o valor da própria correção for insignificante relativamente à incerteza-padrão combinada, ele também pode ser ignorado.

3.4.5 Ocorre na prática, muitas vezes, especialmente no domínio da metrologia legal, que um equipamento é ensaiado por meio de uma comparação com um padrão de medição e as incertezas associadas com o padrão e com o procedimento de comparação são desprezíveis relativamente à exatidão requerida do ensaio. Um exemplo é o uso de um conjunto de padrões de massa bem calibrados para verificar a exatidão de uma balança comercial. Em tais casos, porque os componentes da incerteza são pequenos o bastante para serem ignorados, a medição pode ser vista como determinação do erro do equipamento sob ensaio (ver também F.2.4.2).

3.4.6 A estimativa do valor de um mensurando fornecida pelo resultado de uma medição é algumas vezes expressa em termos do valor adotado de um padrão de medição, em vez de em termos da unidade apropriada do Sistema Internacional de Unidades (SI). Em tais casos, a magnitude da incerteza atribuível ao resultado da medição pode ser significativamente menor do que quando aquele resultado for expresso na unidade SI apropriada (na realidade, o mensurando acima foi redefinido para ser a razão entre o valor da grandeza a ser medida e o valor adotado do padrão).

EXEMPLO Um padrão de tensão Zener de alta qualidade é calibrado por comparação com uma referência de tensão de efeito Josephson baseado no valor convencional da constante Josephson recomendada para uso internacional pelo CIPM. A incerteza-padrão combinada relativa $u_c(V_S)/V_S$ (ver 5.1.6) da diferença de potencial calibrada V_S do padrão Zener é $2 \cdot 10^{-8}$ quando V_S é relatado em termos do valor convencional, mas $u_c(V_S)/V_S$ é $4 \cdot 10^{-7}$ quando V_S é relatado em termos da unidade SI da diferença de potencial, volt (V), por causa da incerteza adicional associada com o valor SI da constante Josephson.

3.4.7 Erros grosseiros cometidos durante o registro ou análise de dados podem introduzir um erro desconhecido significativo no resultado de uma medição. Grandes erros grosseiros podem geralmente ser identificados por uma revisão apropriada dos dados; já os pequenos erros grosseiros podem ser mascarados por variações aleatórias ou, até mesmo, aparecer como tais. Medidas de incerteza não são projetadas para levar em conta tais erros.

3.4.8 Embora este *Guia* proporcione uma metodologia para avaliar incertezas, ele não pode substituir o raciocínio crítico, a honestidade intelectual e a habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina nem uma tarefa puramente matemática; ela depende de conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. A qualidade e utilidade da incerteza indicada para o resultado de uma medição dependem, portanto, em suma, da compreensão, análise crítica e integridade de todos aqueles que contribuem para o estabelecimento de seu valor.

4 Avaliando a incerteza-padrão

No Anexo F pode-se encontrar orientação adicional, principalmente de natureza prática, sobre a avaliação de componentes de incerteza.

4.1 Modelando a medição

4.1.1 Na maioria dos casos o mensurando Y não é medido diretamente, mas é determinado, a partir de N outras grandezas X_1, X_2, ..., X_N, por uma relação funcional f:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \tag{1}$$

NOTA 1 Para economia de notação, neste *Guia* será usado o mesmo símbolo para a grandeza física (o mensurando) e para a variável aleatória (ver 4.2.1) que representa o possível resultado de uma observação dessa grandeza. Quando é declarado que X_i tem uma determinada distribuição de probabilidade, o símbolo é usado neste último sentido e supõe-se que a própria grandeza física possa ser caracterizada por um valor essencialmente único (ver 1.2 e 3.1.3).

NOTA 2 Em uma série de observações, o k-ésimo valor observado X_i é designado como $X_{i,k}$; assim, se R representa a resistência de um resistor, o k-ésimo valor observado da resistência é representado como R_k.

NOTA 3 A estimativa de X_i (estritamente falando, de sua esperança) é designada por x_i.

EXEMPLO Se uma diferença de potencial V é aplicada aos terminais de um resistor dependente da temperatura que tem uma resistência R_0, a uma temperatura definida t_0 e um coeficiente de temperatura linear da resistência α, a potência P (o mensurando) dissipada pelo resistor, à temperatura t, depende de V, R_0, α e t, de acordo com

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/\{R_0[1 + \alpha(t - t_0)]\}$$

NOTA Outros métodos de medição de P seriam modelados por expressões matemáticas diferentes.

4.1.2 As *grandezas de entrada* X_1, X_2, ..., X_N, das quais a grandeza *de saída* Y depende, podem elas mesmas ser consideradas como mensurandos e depender de outras grandezas, incluindo correções e fatores de correção para efeitos sistemáticos, levando, por conseguinte, a uma complicada relação funcional f, que talvez nunca possa ser escrita de modo explícito. Além disso, f pode ser determinada experimentalmente (ver 5.1.4) ou existir somente como um algoritmo que terá de ser resolvido numericamente. A função f, tal como aparece neste *Guia*, deve ser interpretada neste conceito mais amplo, em particular como sendo a função que contém todas as grandezas, incluindo todas as correções e fatores de correção que possam contribuir com um componente de incerteza significativo para o resultado de medição.

Assim, se dados indicam que f não modela a medição no grau imposto pela exatidão requerida do resultado de medição, devem-se incluir grandezas de entrada adicionais em f para eliminar esta inadequação (ver 3.4.2). Isto pode requerer a introdução de uma grandeza de entrada que reflita o conhecimento incompleto de um fenômeno que afeta o mensurando. No exemplo de 4.1.1 podem ser necessárias grandezas de entrada adicionais para responder por uma distribuição de temperatura conhecida e não-uniforme ao longo do resistor, um coeficiente de temperatura da resistência possivelmente não-linear, ou uma possível dependência da resistência quanto à pressão barométrica.

NOTA No entanto, a Equação (1) pode ser tão elementar quanto $Y = X_1 - X_2$. Esta expressão modela, por exemplo, a comparação de duas determinações da mesma grandeza X.

4.1.3 O conjunto de grandezas de entrada X_1, X_2, ..., X_N pode ser categorizado como:

— grandezas cujos valores *e incertezas* podem ser diretamente determinados na medição em curso. Estes valores e incertezas podem ser obtidos, por exemplo, de uma única observação, de observações repetidas, ou de julgamento baseado na experiência, e podem envolver a determinação de correções em leituras de instrumentos e correções por conta de grandezas de influência, tais como temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade;

— grandezas cujos valores *e incertezas* são incorporados à medição a partir de fontes externas, tais como grandezas associadas com padrões de medição calibrados, materiais de referência certificados e dados de referência obtidos de manuais técnicos.

4.1.4 Uma estimativa do mensurando Y, designada por y, é obtida da Equação (1) usando *estimativas de entrada* x_1, x_2, ..., x_N para os valores das N grandezas X_1, X_2, ..., X_N. Assim, a *estimativa de saída* y, que é o resultado da medição, é dada por

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{2}$$

NOTA Em alguns casos, a estimativa y pode ser obtida de

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1.k}, X_{2.k}, \ldots, X_{N.k})$$

Isto é, y é tomado como sendo a média aritmética ou média (ver 4.2.1) de n determinações independentes Y_k de Y, tendo cada determinação a mesma incerteza e cada uma sendo baseada em um conjunto completo de valores observados das N grandezas de entrada X_i obtidos ao mesmo tempo. Esta forma de obter a média, em vez de $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_N)$, onde

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

é a média aritmética das observações individuais $X_{i,k}$, pode ser preferível quando f é uma função não linear das grandezas de entrada X_1, X_2, ..., X_N. Entretanto, os dois procedimentos são idênticos se f é uma função linear de X_i (ver H.2 e H.4).

4.1.5 O desvio-padrão estimado associado com a estimativa de saída ou resultado de medição y, chamado *incerteza-padrão combinada* e designado por $u_c(y)$, é determinado pelo desvio-padrão estimado associado com cada estimativa de entrada x_i, denominado *incerteza-padrão* e designado por $u(x_i)$ (ver 3.3.5 e 3.3.6).

4.1.6 Cada estimativa de entrada x_i e sua incerteza-padrão associada $u(x_i)$ são obtidas de uma distribuição de valores possíveis da grandeza de entrada X_i. Essa distribuição de probabilidade pode ser baseada na freqüência, isto é, em uma série de observações $X_{i,k}$ de X_i, ou pode ser uma distribuição *a priori*. Avaliações do Tipo A dos componentes da incerteza-padrão são fundamentadas em distribuições de freqüência, enquanto que avaliações do Tipo B são fundamentadas em distribuições *a priori*. Deve-se reconhecer que em ambos os casos as distribuições são modelos utilizados para representar o estágio de nosso conhecimento.

4.2 Avaliação da incerteza-padrão do Tipo A

4.2.1 Na maioria dos casos, a melhor estimativa disponível da esperança ou valor esperado μ_q de uma grandeza q que varia aleatoriamente [uma **variável aleatória** (C.2.2)] e para a qual n observações independentes q_k foram obtidas sob as mesmas condições de medição (ver B.2.15), é a **média aritmética** ou **média** q (C.2.19) das n observações:

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Assim, para uma grandeza de entrada X_i estimada a partir de n observações repetidas independentes $X_{i,k}$, a média aritmética $\bar{X}_i$ obtida pela Equação (3) é usada como estimativa de entrada x_i na Equação (2) para determinar o resultado da medição y; isto é, $x_i = \bar{X}_i$. Aquelas estimativas de entrada que não são avaliadas por observações repetidas devem ser obtidas por outros métodos, tais como os indicados na segunda categoria de 4.1.3.

4.2.2 As observações individuais q_k diferem em valor por causa de variações aleatórias nas grandezas de influência, ou efeitos aleatórios (ver 3.2.2). A variância experimental das observações, que estima a variância σ^2 da distribuição de probabilidade de q, é dada por

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(q_j - \bar{q})^2 \tag{4}$$

Esta estimativa da variância e sua raiz quadrada positiva $s(q_k)$, denominada **desvio-padrão experimental** (B.2.17), caracterizam a variabilidade dos valores q_k observados ou, mais especificamente, sua dispersão em torno de sua média $\bar{q}$.

4.2.3 A melhor estimativa de $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$, a variância da média, é dada por

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

A variância experimental da média $s^2(\bar{q})$ e o **desvio-padrão experimental da média** $s(\bar{q})$ (B.2.17, Nota 2), igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\bar{q})$, quantificam quão bem $\bar{q}$ estima a esperança μ_q de q, e qualquer um deles pode ser usado como uma medida da incerteza de $\bar{q}$.

Assim, para uma grandeza de entrada X_i determinada por n observações repetidas e independentes $X_{i,k}$, a incerteza-padrão $u(x_i)$ de sua estimativa $x_i = \bar{X}_i$ é $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$, com $s^2(\bar{X}_i)$ calculada de acordo com a Equação (5). Por conveniência, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$, e $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ são por vezes denominados uma *variância do Tipo A* e uma *incerteza-padrão do Tipo A*, respectivamente.

NOTA 1 O número de observações n deve ser suficientemente grande para assegurar que $\bar{q}$ forneça uma estimativa confiável da esperança μ_q da variável aleatória q e que $s^2(\bar{q})$ forneça uma estimativa confiável da variância $s^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$ (ver 4.3.2, nota). A diferença entre $s^2(\bar{q})$ e $\sigma^2(\bar{q})$ deve ser considerada quando se estabelecem intervalos de confiança (ver 6.2.2). Nesse caso, se a distribuição de probabilidade de q é uma distribuição normal (ver 4.3.4), a diferença é levada em consideração através da distribuição-t (ver G.3.2).

NOTA 2 Embora a variância $s^2(\bar{q})$ seja a grandeza mais fundamental, o desvio-padrão $s(\bar{q})$ é mais conveniente na prática porque tem as mesmas dimensões de q e um valor de mais fácil compreensão do que aquele da variância.

4.2.4 Para uma medição bem caracterizada sob controle estatístico, uma estimativa combinada ou agrupada da variância s_p^2 (ou um desvio-padrão experimental agrupado s_p) que caracteriza a medição pode estar disponível. Nesse caso, quando o valor do mensurando q é determinado a partir de n observações independentes, a variância experimental da média aritmética $\bar{q}$ das observações é mais bem estimada por s_p^2/n do que por $s^2(q_k)/n$ e a incerteza-padrão é $\mu = s_p/\sqrt{n}$. (ver também a Nota para H.3.6).

4.2.5 Frequentemente uma estimativa x_i de uma *grandeza* de entrada X_i é obtida de uma curva que foi ajustada a dados experimentais pelo método dos mínimos quadrados. As variâncias estimadas e as incertezas-padrão resultantes dos parâmetros ajustados que caracterizam a curva e de quaisquer pontos de predição, podem ser usualmente calculadas por procedimentos estatísticos bem conhecidos (ver H.3 e Referência [8]).

4.2.6 Os graus de liberdade (C.2.31) ν_i de $u(x_i)$ (ver G.3), iguais a n - 1 no caso *simples* em que $x_i = \bar{X}_i$ e $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ são calculados a partir de n observações independentes, como em 4.2.1 e 4.2.3, devem ser sempre fornecidos quando avaliações do Tipo A dos componentes de incerteza forem documentadas.

4.2.7 Se as variações aleatórias nas observações de uma grandeza de *entrada* são correlacionadas, por exemplo, na grandeza tempo, a média e o desvio-padrão experimental da média, tais como dados em 4.2.1 e 4.2.3, podem ser **estimadores** (C.2.25) não apropriados da **estatística** (C.2.23) desejada. Em tais casos, as observações devem ser analisadas por métodos estatísticos especialmente criados para tratar uma série de medições correlacionadas que variam aleatoriamente.

NOTA Tais métodos especializados são usados para tratar medições de padrões de frequência. Entretanto, é possível que, à medida que se passa de medições de curto prazo para medições de longo prazo de outras grandezas metrológicas, a suposição de variações aleatórias não-correlacionadas pode não ser mais válida e métodos especializados poderiam também ser usados para tratar destas medições. (Ver a Referência [9], por exemplo, para uma discussão detalhada da variância de Allan.)

4.2.8 A discussão sobre a *avaliação* do Tipo A da incerteza-padrão, de 4.2.1 a 4.2.7, não se destina a ser exaustiva; há muitas situações, algumas bem complexas, que podem ser tratadas por métodos estatísticos. Um exemplo importante é o uso de projetos de calibração, frequentemente baseados no método dos mínimos quadrados, para analisar as incertezas oriundas tanto de variações aleatórias de curto prazo como de longo prazo nos resultados de comparações de artefatos materiais de valor *desconhecido*, tais como blocos-padrão e padrões de massa, com padrões de referência de valor conhecido. Em tais situações de medição relativamente simples, os componentes da incerteza podem ser frequentemente avaliados pela análise estatística de dados obtidos a partir de arranjos consistindo de sequências aninhadas de medições do mensurando, para vários valores diferentes das grandezas das quais ele depende - o que é chamado análise de variância (ver H.5).

NOTA Em níveis mais baixos da cadeia de calibração, nas situações em que padrões de referência são frequentemente supostos como sendo exatamente conhecidos, porque foram calibrados por um laboratório primário ou nacional, a incerteza de um resultado de calibração pode ser uma única incerteza-padrão do Tipo A, calculada a partir do desvio-padrão experimental agrupado que caracteriza a medição.

4.3 Avaliação da incerteza-padrão do Tipo B

4.3.1 Para uma estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i que não tenha sido obtida através de observações repetidas, a variância estimada associada $u^2(x_i)$ ou a incerteza-padrão $u(x_i)$ é avaliada por julgamento científico baseando em todas as informações disponíveis sobre a possível variabilidade de X_i. O conjunto de informações pode incluir

— dados de medições prévias;

— experiência com ou conhecimento geral do comportamento e das propriedades de materiais e instrumentos relevantes;

— especificações do fabricante;

— dados fornecidos em certificados de calibração e outros certificados;

— incertezas atribuídas a dados de referência extraídos de manuais.

Por conveniência, $u^2(x_i)$ e $u(x_i)$ estimados dessa maneira são por vezes referidos como, respectivamente, uma *variância do Tipo B* e uma *incerteza-padrão do Tipo B*.

NOTA Quando x_i é obtido de uma distribuição *a priori*, a variância associada é apropriadamente escrita como $u^2(X_i)$, mas, por simplicidade, $u^2(x_i)$ e $u(x_i)$ são usados neste *Guia*.

4.3.2 O uso adequado do conjunto de informações disponíveis para uma avaliação do Tipo B da incerteza-padrão exige discernimento baseado na experiência e no conhecimento geral, habilidade que pode ser aprendida com a prática. Deve-se reconhecer que uma avaliação do Tipo B da incerteza-padrão pode ser tão confiável quanto uma avaliação do Tipo A, especialmente numa situação de medição onde uma avaliação do Tipo A é baseada em um número comparativamente pequeno de observações estatisticamente independentes.

NOTA Se a distribuição da probabilidade de q, na Nota 1 de 4.2.3, é normal, então $\sigma[s(\bar{q})]/= \sigma(\bar{q})$, o desvio-padrão de $s(\bar{q})$ relativo a $\sigma(\bar{q})$, é, aproximadamente, $[2(n-1)]^{-1/2}$. Assim, tomando-se $\sigma[s(\bar{q})]$ como a incerteza de $s(\bar{q})$, para n = 10 observações, a incerteza relativa em $s(\bar{q})$ é 24 por cento, enquanto que, para n = 50 observações, ela é 10 por cento. (Valores adicionais são dados na Tabela E.1, no Anexo E.)

4.3.3 Se a estimativa x_i for obtida de uma especificação do fabricante, certificado de calibração, manual técnico ou outra fonte e sua incerteza citada for declarada ser um determinado múltiplo de um desvio-padrão, a incerteza-padrão $u(x_i)$ é simplesmente o valor mencionado dividido pelo multiplicador, e a variância estimada $u^2(x_i)$ é o quadrado desse quociente.

EXEMPLO Um certificado de calibração declara que a massa m_S de um padrão de massa de aço inoxidável, com valor nominal de um quilograma, é 1 000,000 325 g e que a “incerteza desse valor é de 240 µg no nível de três desvios-padrão”. A incerteza-padrão do padrão de massa é, então, simplesmente, $u(m_S)$ = (240 µg)/3 = 80 µg. Isso corresponde a uma incerteza-padrão relativa $u(m_S)/m_S$ of 80 x 10^{-9} (ver 5.1.6). A variância estimada é $u^2(m_S)$ = $(80\ \mu g)^2$ = 6,4 x 10^{-9} g^2.

NOTA Em muitos casos, pouca ou nenhuma informação é dada a respeito dos componentes individuais a partir dos quais foi obtida a incerteza mencionada. Isto geralmente não tem importância para expressar incerteza de acordo com as práticas deste Guia, uma vez que todas as incertezas-padrão são tratadas exatamente da mesma maneira quando se calcula a incerteza-padrão combinada de um resultado de medição (ver Capítulo 5).

4.3.4 A incerteza citada de x_i não é, necessariamente, dada como um múltiplo de um desvio-padrão, como em 4.3.3. Em vez disso, pode-se encontrar declarado que a incerteza citada define um intervalo tendo um nível da confiança de 90, 95 ou 99 por cento (ver 6.2.2). A não ser quando indicado de outro modo, pode-se supor que foi usada uma distribuição normal (C.2.14) para calcular a incerteza citada e recuperar a incerteza-padrão de x_i, dividindo-se a incerteza citada pelo fator apropriado para a distribuição normal. Os fatores correspondentes aos três níveis da confiança acima são 1,64; 1,96 e 2,58 (ver também a Tabela G.1, no Anexo G).

NOTA Não haveria necessidade de tal suposição se a incerteza tivesse sido fornecida de acordo com as recomendações deste *Guia* com relação à declaração de incerteza, o que reforça que o fator de abrangência utilizado deve sempre ser fornecido (ver 7.2.3).

EXEMPLO Um certificado de calibração estabelece que a resistência de um resistor padrão R_S de valor nominal de dez ohms é 10,000 742 Ω ± 129 µΩ a 23 °C e que “a incerteza citada de 129 µΩ define um intervalo tendo um nível da confiança de 99 por cento”. A incerteza-padrão do valor do resistor pode ser tomada como $u(R_S)$ = (129 µΩ)/2,58 = 50 µΩ, o que corresponde a uma incerteza-padrão relativa $u(R_S)/R_S$ of 5,0 x 10^{-6} (ver 5.1.6). A variância estimada é $u^2(R_S)$ = $(50\ \mu\Omega)^2$ = 2,5 x 10^{-9} Ω^2.

4.3.5 Considere o caso onde, com base nas informações disponíveis, pode-se estabelecer que “há uma chance de cinqüenta em cem de que o valor da grandeza de entrada X_i resida no intervalo a_- até a_+” (em outras palavras, a probabilidade de que X_i esteja neste intervalo é de 0,5 ou 50 por cento). Se se puder supor que a distribuição dos valores possíveis de X_i é aproximadamente normal, então a melhor estimativa x_i de X_i pode ser tomada no ponto médio do intervalo. Adicionalmente, se a meia largura do intervalo é designada por $a = (a_+ - a_-)/2$, toma-se $u(x_i) = 1{,}48a$, uma vez que, para uma distribuição normal com esperança μ e desvio-padrão σ, o intervalo $\mu \pm \sigma/1{,}48$ abrange, aproximadamente, 50 por cento da distribuição.

EXEMPLO Um operador de máquinas, ao determinar as dimensões de uma peça, estima que seu comprimento esteja, com uma probabilidade de 0,5, no intervalo de 10,07 mm a 10,15 mm, e relata que l = (10,11 ± 0,04) mm, significando que ± 0,04 mm define um intervalo tendo um nível da confiança de 50 por cento. Então, a = 0,04 mm e, supondo-se uma distribuição normal para os possíveis valores de l, a incerteza-padrão do comprimento é $u(l)$ =1,48 *x* 0,04 mm ≈ 0,06 mm e a variância estimada é $u^2(l)$ = (1,48 x 0,04 mm)^2 = 3,5 x 10^{-3} mm^2.

4.3.6 Considere um caso similar ao do item 4.3.5, mas onde, com base na informação disponível, pode-se estabelecer que “há cerca de duas chances em três de que o valor de X_i esteja no intervalo a_- até a_+” (em outras palavras, a probabilidade de que X_i esteja neste intervalo é de aproximadamente 0,67). Então, pode-se, razoavelmente, tomar $u(x_i) = a$, porque, para uma distribuição normal com esperança μ e desvio-padrão σ, o intervalo $\mu \pm \sigma$ abrange cerca de 68,3 por cento da distribuição.

NOTA Dar-se-ia ao valor $u(x_i)$ significância consideravelmente maior do que lhe é obviamente garantido se fosse utilizado o desvio normal real 0,967 42 correspondente à probabilidade $p = 2/3$, isto é, se fosse escrito $u(x_i) = a/0{,}967\ 42 = 1{,}033a$.

4.3.7 Em outros casos, pode ser possível apenas estimar extremos (limites superior e inferior) para X_i, em particular, afirmar que "a probabilidade de que o valor X_i esteja dentro do intervalo a_- até a_+, para todos os fins práticos, é igual a um, e a probabilidade de que X_i esteja fora deste intervalo é, essencialmente, zero". Se não há *conhecimento específico* sobre os valores possíveis de X_i dentro do intervalo, pode-se apenas supor que é igualmente provável que X_i esteja em qualquer lugar dentro dele (uma distribuição uniforme ou retangular de valores possíveis - ver 4.4.5 e Figura 2a). Então, x_i, a esperança ou valor esperado de X_i, é o ponto médio no intervalo, $x_i = (a_- + a_+)/2$, com variância associada

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \tag{6}$$

Se a diferença entre os limites, $a_+ - a_-$, é designada por $2a$, então a Equação (6) torna-se:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{7}$$

NOTA Quando um componente de incerteza determinado deste modo contribui significativamente para a incerteza de um resultado de medição, é prudente que se obtenham dados adicionais para sua avaliação mais completa.

EXEMPLO 1 Um manual fornece o valor do coeficiente de expansão térmica linear do cobre puro a 20 ºC, α_{20}(Cu), como $16{,}52 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$ e simplesmente estabelece que "o erro neste valor não deve exceder $0{,}40 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$". Baseado nessas informações limitadas, não é absurdo supor que o valor de α_{20}(Cu) estará distribuído com igual probabilidade no intervalo de $16{,}12 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$ a $16{,}92 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$ e que é muito pouco provável que α_{20}(Cu) esteja fora dele. A variância dessa distribuição retangular simétrica de valores possíveis de α_{20}(Cu) de meia-largura $a = 0{,}40 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$ é, então, a partir da Equação (7), $u^2(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1})^2/3 = 53{,}3 \times 10^{-15}$ ℃$^{-2}$, e a incerteza-padrão é $u(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}) / \sqrt{3} = 0{,}23 \times 10^{-6}$ ℃$^{-1}$.

EXEMPLO 2 As especificações do fabricante para um voltímetro digital estabelecem que "entre um e dois anos depois que o instrumento é calibrado, sua exatidão na faixa de 1 V é 14×10^{-6} vezes a leitura mais 2×10^{-6} vezes a faixa". Considere-se que o instrumento é usado 20 meses após a calibração para medir em sua faixa de 1 V uma diferença de potencial V, e que a média aritmética de um número de observações repetidas independentes de V é encontrada como sendo $\bar{V} = 0{,}928\ 571$ V, com uma incerteza-padrão do Tipo A $u(\bar{V}) = 12$ μV. Pode-se obter a incerteza-padrão associada com as especificações do fabricante a partir de uma avaliação do Tipo B, supondo que a exatidão declarada fornece limites simétricos para uma correção aditiva a $\bar{V}$, $\Delta\bar{V}$, de esperança igual a zero e com igual probabilidade de estar em qualquer parte dentro dos limites. A meia-largura a da distribuição retangular simétrica de valores possíveis de $\Delta\bar{V}$ é, então, $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0{,}928\ 571$ V$) + (2 \times 10^{-6}) \times (1$ V$) = 15$ μV e, pela Equação (7), $u^2(\Delta\bar{V}) = 75$ μV^2 e $u(\Delta\bar{V}) = 8{,}7$ μV. A estimativa do valor do mensurando V, para fins de maior simplicidade denotada pelo mesmo símbolo V, é dada por $V = \bar{V} + \Delta\bar{V} = 0{,}928\ 571$ V. Pode-se obter a incerteza-padrão combinada dessa estimativa, combinando-se a incerteza-padrão do Tipo A de 12 μV de $\bar{V}$ com a incerteza-padrão do Tipo B de 8,7 μV de $\Delta\bar{V}$. O método geral para combinar componentes de incerteza-padrão é dado na Capítulo 5, com este exemplo particular sendo tratado no item 5.1.5.

4.3.8 Em 4.3.7, os limites superior e inferior a_+ e a_- para a grandeza de entrada X_i podem não ser simétricos com relação à melhor estimativa x_i; mais especificamente, se o limite inferior é escrito como $a_- = x_i - b_-$ e o limite superior, como $a_+ = x_i - b_+$, então $b_- \neq b_+$. Uma vez que, neste caso, x_i (suposto ser a esperança de X_i) não está no centro do intervalo de a_- até a_+, a distribuição da probabilidade de X_i não pode ser uniforme em todo o intervalo. Entretanto, pode não haver suficiente informação disponível para escolher uma distribuição apropriada; modelos diferentes levarão a diferentes expressões para a variância. Na ausência de tal informação, a aproximação mais simples é

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \tag{8}$$

que é a variância de uma distribuição retangular com largura total $b_+ + b_-$. (As distribuições assimétricas também serão discutidas em F.2.4.4 e G.5.3)

EXEMPLO Se no Exemplo 1 de 4.3.7 o valor do coeficiente é dado no manual como α_{20}(Cu) = 16,52 × 10^{-6} °C $^{-1}$ e é dito que "o menor valor possível é 16,40 × 10^{-6} °C $^{-1}$ e que o maior valor possível é 16,92 × 10^{-6} °C $^{-1}$", então $b_- = 0{,}12 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$, $b_+ = 0{,}40 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$ e, da Equação (8), $u(\alpha_{20}) = 0{,}15 \times 10^{-6}$ °C $^{-1}$.

NOTA 1 Em muitas situações práticas de medição em que as fronteiras são assimétricas, pode ser apropriado aplicar uma correção à estimativa x_i de magnitude $(b_+ - b_-)/2$, de modo que a nova estimativa x_i' de X_i esteja no ponto médio entre os limites: $x_i' = (a_- + a_+)/2$. Isto reduz a situação ao caso de 4.3.7, com novos valores $b_+' = b_-' = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

NOTA 2 Com base no princípio da máxima entropia pode-se demonstrar que a função densidade da probabilidade no caso assimétrico é igual a $p(X_i) = A \exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, com $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$ e $\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1\}/\{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\}$. Isto leva à variância $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$; para $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ e para $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9 Em 4.3.7, como não havia conhecimento específico sobre os possíveis valores de X_i dentro de seus limites estimados a_- e a_+, poder-se-ia somente supor que seria igualmente provável, para X_i, tomar qualquer valor entre esses limites, com probabilidade zero de estar fora deles. Tais descontinuidades de função degrau em uma distribuição de probabilidade não são muitas vezes físicas. Em muitos casos, é mais realista esperar que valores perto dos limites sejam menos prováveis do que os que estejam perto do ponto médio. É então razoável substituir a distribuição retangular simétrica por uma distribuição trapezoidal simétrica tendo lados inclinados iguais (um trapezóide isósceles), uma base de largura $a_+ - a_- = 2a$ e um topo de largura $2a\beta$, onde $0 \le \beta \le 1$. Na medida em que $\beta \to 1$, esta distribuição trapezoidal se aproxima da distribuição retangular de 4.3.7, enquanto que, para $\beta = 0$, torna-se uma distribuição triangular (ver 4.4.6 e a Figura 2b). Supondo tal distribuição trapezoidal para X_i, encontra-se que a esperança de X_i é $x_i = (a_- + a_+)/2$ e sua variância associada é

$$u^2(x_i) = \frac{a^2(1+\beta^2)}{6} \tag{9a}$$

que se torna, para a distribuição triangular, $\beta = 0$,

$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{6} \tag{9b}$$

NOTA 1 Para uma distribuição normal, com esperança μ e desvio-padrão σ, o intervalo $\mu \pm 3\sigma$ abrange, aproximadamente, 99,73 por cento da distribuição. Então, se os limites superior e inferior a_+ e a_- definem limites de 99,73 por cento em vez de limites de 100 por cento, pode-se supor que X_i tenha distribuição aproximadamente normal (em lugar de se supor não existir conhecimento específico acerca de X_i entre os limites, como em 4.3.7). Neste caso $u^2(x_i) = a^2/9$. Para comparação, a variância de uma distribuição retangular simétrica de meia-largura a é $a^2/3$ [Equação (7)], e a de uma distribuição triangular simétrica com meia-largura a é a $a^2/6$ [Equação (9b)]. As magnitudes das variâncias dessas três distribuições são surpreendentemente similares, em vista da grande diferença na quantidade de informações requeridas para justificá-las.

NOTA 2 A distribuição trapezoidal é equivalente à convolução de duas distribuições retangulares [10], uma com meia-largura a_1 igual à meia-largura média do trapezóide, $a_1 = a(1 + \beta)/2$, a outra com uma meia largura a_2, igual à largura média de uma das porções triangulares do trapezóide, $a_2 = a(1 - \beta)/2$. A variância da distribuição é $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. A distribuição da convolução pode ser interpretada como uma distribuição retangular cuja largura $2a_1$ tem, ela mesma, uma incerteza representada por uma distribuição retangular de largura $2a_2$, e modela o fato de que as fronteiras de uma grandeza de entrada não são exatamente conhecidas. Porém mesmo que a_2 seja tão grande quanto 30 por cento de a_1, u excede $a_1/\sqrt{3}$ por menos de 5 por cento.

4.3.10 É importante não "contar duplamente" os componentes da incerteza. Se um componente da incerteza, surgindo de um determinado efeito, é obtido a partir de uma avaliação do Tipo B, deve ser incluído como um componente independente da incerteza no cálculo da incerteza-padrão combinada do resultado de medição somente na medida em que o efeito não contribua para a variabilidade observada das observações. Isto porque a incerteza oriunda daquela parte do efeito que contribui para a variabilidade observada já está incluída no componente da incerteza obtido a partir da análise estatística das observações.

4.3.11 A discussão sobre a avaliação da incerteza-padrão do Tipo B, de 4.3.3 a 4.3.9, foi feita somente com fins indicativos. Além disso, a avaliação da incerteza deve ser baseada, na maior extensão possível, em dados quantitativos, como enfatizado em 3.4.1 e 3.4.2.

4.4 Ilustração gráfica da avaliação da incerteza-padrão

4.4.1 A Figura 1 representa a estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i e a avaliação da incerteza dessa estimativa decorrentes da distribuição desconhecida de possíveis valores medidos de X_i, ou distribuição de probabilidade de X_i, que é amostrada por meio de observações repetidas.

4.4.2 Na Figura 1a), supõe-se que a grandeza de entrada X_i seja uma temperatura t e que sua distribuição desconhecida é uma distribuição normal, com esperança $\mu_t = 100$ °C e desvio-padrão $\sigma = 1{,}5$ °C. Sua função densidade de probabilidade é, en tão (ver C.2.14)

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_t}{\sigma}\right)^2\right]$$

NOTA A definição de função densidade de probabilidade $p(z)$ requer que a relação $\int p(z)dz = 1$ seja satisfeita.

4.4.3 A Figura 1b) mostra um histograma de $n = 20$ observações repetidas t_k da temperatura t, supostas como tendo sido tomadas aleatoriamente a partir da distribuição da Figura 1a). Para obter o histograma, as 20 observações ou amostras, cujos valores são dados na Tabela 1, são agrupadas em intervalos de 1 ºC de largura. (A preparação do histograma é, naturalmente, desnecessária para a análise estatística dos dados).

Tabela 1 — Vinte observações repetidas da temperatura *t* agrupadas em intervalos de 1 ºC

Intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$		Temperatura
$t_1/°\mathrm{C}$	$t_2/°\mathrm{C}$	$t/°\mathrm{C}$
94,5	95,5	—
95,5	96,5	—
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	—
104,5	105,5	—

A média aritmética ou média $\bar{t}$ das $n = 20$ observações, calculada de acordo com a Equação (3), é $\bar{t} = 100{,}145°\mathrm{C} \approx 100{,}14°\mathrm{C}$ e é suposta ser a melhor estimativa da esperança μ_t de t com base nos dados disponíveis. O desvio-padrão experimental $s(t_k)$ calculado pela Equação (4) é $s(t_k) = 1{,}489°\mathrm{C} \approx 1{,}49°\mathrm{C}$, e o desvio-padrão experimental da média $s(\bar{t})$ calculado pela Equação (5), que é a incerteza-padrão $u(\bar{t})$ da média $\bar{t}$, é $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20} = 0{,}333°\mathrm{C} \approx 0{,}33°\mathrm{C}$. (Para cálculos futuros é conveniente que todos os dígitos sejam conservados.)

NOTA Embora os dados na Tabela 1 não sejam implausíveis considerando-se o largo uso de termômetros eletrônicos digitais de alta resolução, eles têm fins ilustrativos e não devem ser interpretados como descrevendo necessariamente uma medição real.

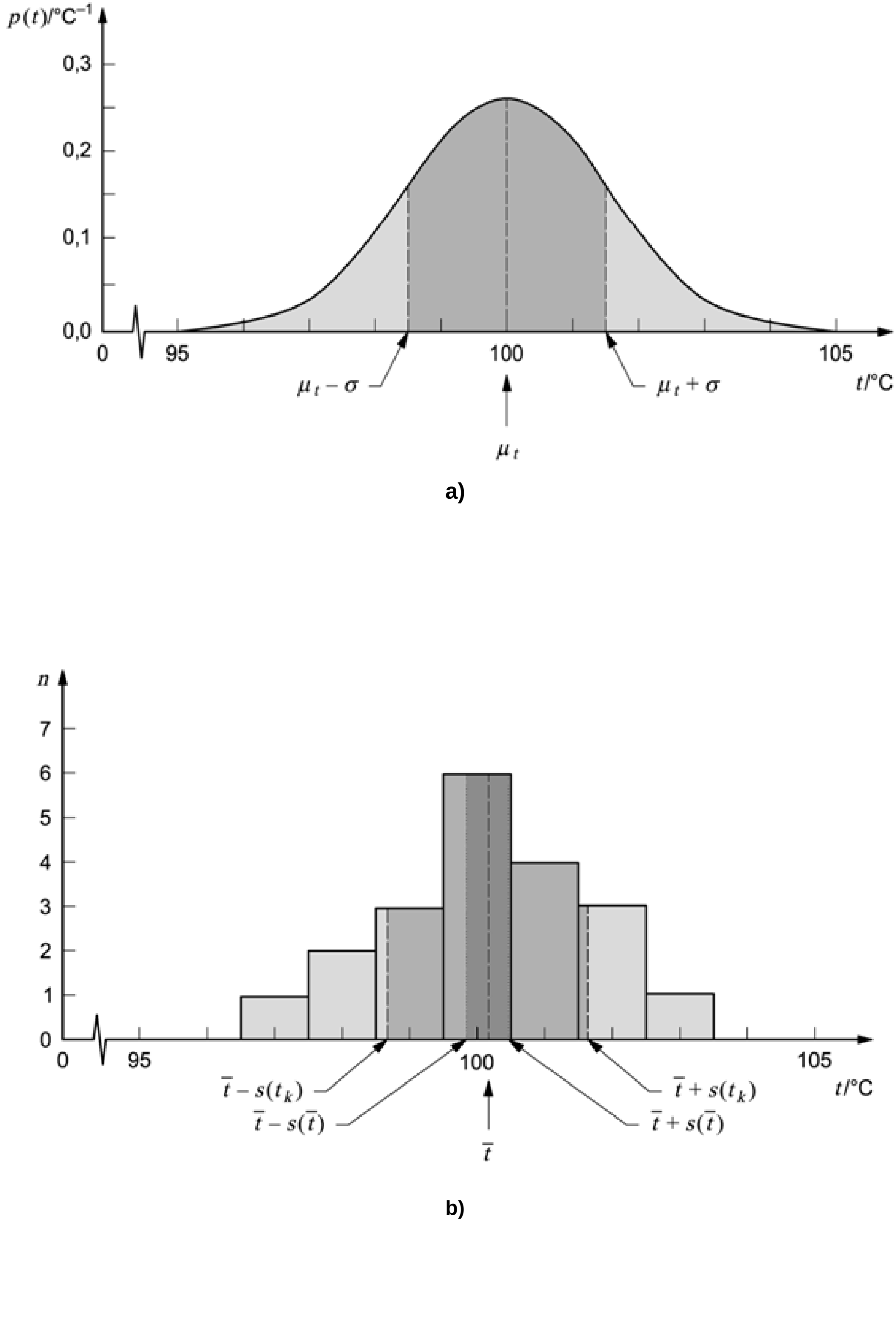
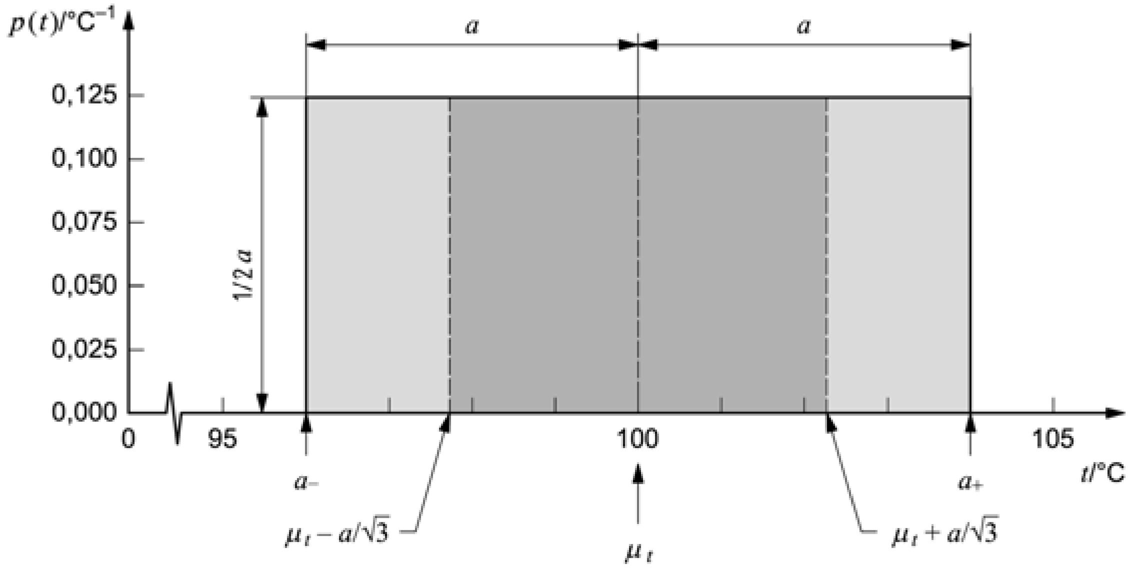
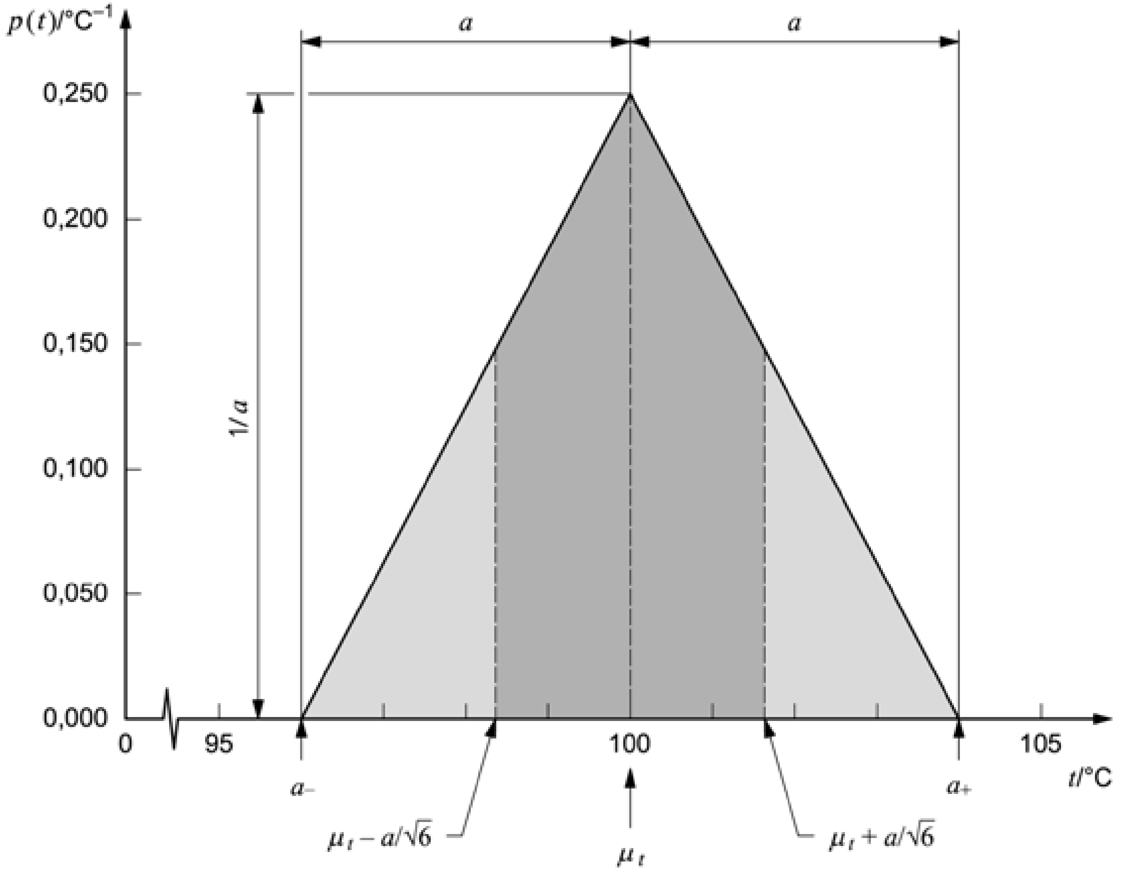


Figura 1 – Ilustração gráfica da avaliação da incerteza-padrão de uma grandeza de entrada a partir de observações repetidas



a)



b)

Figura 2 – Ilustração gráfica da avaliação da incerteza-padrão de uma grandeza de entrada a partir de uma distribuição *a priori*

4.4.4 A Figura 2 representa a estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i e a avaliação da incerteza dessa estimativa a partir de uma distribuição a priori dos valores possíveis de X_i, ou distribuição de probabilidade de X_i, baseada em todas as informações disponíveis. Para ambos os casos mostrados a grandeza de entrada é suposta, mais uma vez, como sendo a temperatura t.

4.4.5 Para o caso ilustrado na Figura 2a) assume-se que haja pouca informação disponível sobre a grandeza de entrada t e que tudo que se pode fazer é supor que t seja descrito por uma distribuição de probabilidade *a priori* retangular e simétrica de limite inferior $a_- = 96$ ℃, limite superior $a_+ = 104$ ℃ e, portanto, uma meia-largura $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ ℃ (ver 4.3.7). A função densidade de probabilida de de t é

$$p(t) = 1/(2a) \qquad a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \qquad \text{para outros valores de } t.$$

Como indicado em 4.3.7, a melhor estimativa de t é sua esperança $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ ℃, que decorre de C.3.1. A incerteza-padrão desta estimativa é $u(\mu_t) = a / \sqrt{3} \approx 2{,}3$ °C, que decorre de C.3.2 [ver Equação (7)].

4.4.6 Para o caso ilustrado na Figura 2b), assume-se que a informação disponível relativa a t seja menos limitada e que t possa ser descrito por uma distribuição de probabilidade *a priori* triangular e simétrica de mesmo limite inferior $a_- = 96$ ℃, mesmo limite superior $a_+ = 104$ ℃ e, assim, mesma meia largura $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ ℃, como em 4.4.5 (ver 4.3.9). A função densidade de probabilidade de t é, então

$$p(t) = (t - a_-)/a^2, \qquad a_- \leq t \leq (a_+ + a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2, \qquad (a_+ + a_-)/2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0, \qquad \text{para outros valores de } t.$$

Como indicado em 4.3.9, a esperança de t é $\mu(t) = (a_+ + a_-)/2 = 100$ ℃, que decorre de C.3.1. A incerteza-padrão dessa estimativa é $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1{,}6$ ℃, que decorre de C.3.2 [ver Equação (9b)].

Este último valor, $u(\mu_t) = 1{,}6$ ℃, pode ser comparado com $u(\mu_t) = 2{,}3$ ℃, obtido em 4.4.5 a partir de uma distribuição retangular de mesma largura de 8 ºC, com $\sigma = 1{,}5$ ℃ da distribuição normal da Figura 1a) cuja largura, de $-2{,}58\sigma$ a $+2{,}58\sigma$, que abrange 99 por cento da distribuição, é quase 8 ºC; e com $u(\bar{t}) = 0{,}33$ °C obtido em 4.4.3 a partir de 20 observações tomadas supostamente de forma aleatória a partir da mesma distribuição normal.

5 Determinando a incerteza-padrão combinada

5.1 Grandezas de entrada não correlacionadas

Este item trata do caso em que todas as grandezas de entrada são **independentes** (C.3.7). O caso em que duas ou mais grandezas de entrada são relacionadas, isto é, são interdependentes ou **correlacionadas** (C.2.8), é discutido em 5.2.

5.1.1 A incerteza-padrão de y, onde y é a estimativa do mensurando Y e, desta maneira, o resultado da medição, é obtida pela combinação apropriada de incertezas-padrão das estimativas de entrada x_1, x_2, ..., x_N (ver 4.1). Esta incerteza-padrão combinada da estimativa y é representada por $u_c(y)$.

NOTA Por razões similares àquelas dadas na nota de 4.3.1, os símbolos $u_c(y)$ e $u_c^2(y)$ são usados em todos os casos.

5.1.2 A incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ é a raiz quadrada positiva da variância combinada $u_c^2(y)$, que é dada por

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \tag{10}$$

onde f é a função citada na Equação (1). Cada $u(x_i)$ é uma incerteza-padrão avaliada como descrito em 4.2 (avaliação Tipo A) ou em 4.3 (avaliação Tipo B). A incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ é um desvio-padrão estimado e caracteriza a dispersão dos valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando Y (ver 2.2.3).

A Equação (10) e sua correspondente para grandezas de entrada correlacionadas, Equação (13), ambas baseadas numa aproximação de primeira ordem da série de Taylor de $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$, expressam o que , neste *Guia*, é denominado *lei de propagação de incertezas* (ver E.3.1 e E.3.2).

NOTA Quando a não-linearidade de f é significativa, termos de ordem superior devem ser incluídos na expansão da série de Taylor para a expressão de $u_c^2(y)$, Equação (10). Quando a distribuição de cada X_i é normal, os termos mais importantes de ordem imediatamente superior a serem adicionados aos termos da Equação (10) são

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2(x_i)\, u^2(x_j)$$

Ver H.1 para um exemplo de uma situação na qual é necessário considerar a contribuição de termos de ordem superior para $u_c^2(y)$.

5.1.3 As derivadas parciais $\partial f/\partial x_i$ são iguais a $\partial f/\partial X_i$ avaliadas para $X_i = x_i$ (ver a Nota 1 a seguir). Estas derivadas, frequentemente denominadas coeficientes de sensibilidade, descrevem como a estimativa de saída y varia com alterações nos valores das estimativas de entrada x_1, x_2, ..., x_N. Em particular, a alteração em y, produzida por uma pequena variação Δx_i na estimativa de entrada x_i, é dada por $(\Delta y)_i = (\partial f/\partial x_i)(\Delta x_i)$. Se esta alteração é gerada pela incerteza-padrão da estimativa x_i, a variação correspondente em y é $(\partial f/\partial x_i)u(x_i)$. A variância combinada $u_c^2(y)$ pode, desse modo, ser vista como uma soma de termos em que cada um deles representa a variância estimada associada com a estimativa de saída y gerada pela variância estimada associada com cada estimativa de entrada x_i. Isso sugere que se escreva a Equação (10) como

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}[c_i u(x_i)] = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{11a}$$

onde

$$c_i \equiv \partial f/\partial x_i\,, \qquad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \tag{11b}$$

NOTA 1 Estritamente falando, as derivadas parciais são $\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i$ avaliadas para as esperanças de X_i. Contudo, na prática, as derivadas parciais são estimadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\Big|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$

NOTA 2 A incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ pode ser calculada numericamente substituindo-se $c_i u(x_i)$ na Equação (11a) com

$$Z_i = \frac{1}{2}\{f[x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N] - f[x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N]\}$$

Isto é, $u_i(y)$ é avaliada numericamente, calculando-se a variação em y devido a uma variação em x_i de + $u(x_i)$ e de - $u(x_i)$. O valor de $u_i(y)$ pode, então, ser tomado como $|Z_i|$, e o valor do coeficiente de sensibilidade correspondente c_i, como $Z_i/u(x_i)$.

EXEMPLO Para o exemplo de 4.1.1, usando o mesmo símbolo tanto para a grandeza como para sua estimativa, para maior simplicidade de notação,

$$c_1 \equiv \partial P/\partial V = 2V/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\} = 2P/V$$

$$c_2 \equiv \partial P/\partial R_0 = -V^2/\{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]\} = -P/R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P/\partial \alpha = -V^2(t-t_0)/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0]$$

$$c_4 \equiv \partial P/\partial t = -V^2\alpha/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0]$$

e

$$u^2(P) = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t)$$

$$= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2$$

$$= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)$$

5.1.4 Em vez de serem calculados pela função f, os coeficientes de sensibilidade $\partial f/\partial x_i$ são, por vezes, determinados experimentalmente: mede-se a variação em Y causada por uma variação em um dado X_i, enquanto se mantêm constantes as grandezas de entrada restantes. Neste caso, o conhecimento da função f (ou de parte dela, quando somente alguns coeficientes de sensibilidade são assim determinados) é, de forma correspondente, reduzido a uma expansão empírica de primeira ordem da série de Taylor baseada nos coeficientes de sensibilidade medidos.

5.1.5 Se a Equação (1) para o mensurando Y é expandida em torno dos valores nominais $X_{i,0}$ das grandezas de entrada X_i, então, até a primeira ordem (o que é, geralmente, uma aproximação adequada), $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + ... + c_N\delta_N$, onde $Y_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{N,0})$, $c_i = (\partial f/\partial X_i)$ avaliado em $X_i = X_{i,0}$ e $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Assim, para fins de uma análise de incerteza, um mensurando é usualmente aproximado por uma função linear de suas variáveis, transformando-se suas grandezas de entrada de X_i para δ_i (ver E.3.1).

EXEMPLO No Exemplo 2 de 4.3.7, a estimativa do valor do mensurando U é $V = \bar{V} + \Delta\bar{V}$, onde $\bar{V}$ = 0,928 571 V, $u(\bar{V})$ = 12 µV, a correção aditiva $\Delta\bar{V}$ = 0, e $u(\Delta\bar{V})$ = 8,7 µV. Uma vez que $\partial V/\partial\bar{V}$ = 1, e $\partial V/\partial(\Delta\bar{V})$ = 1, a variância combinada associada com V é dada por

$$u_c^2(V) = u^2(\bar{V}) + u^2(\Delta\bar{V}) = (12\ \mu\text{V})^2 + (8{,}7\ \mu\text{V})^2 = 219\times10^{-12}\text{V}^2$$

e a incerteza-padrão combinada é $u_c(V)$ = 15 µV, que corresponde a uma incerteza-padrão combinada relativa $u_c(V)/V$ de 16 x 10^{-6} (ver 5.1.6). Este é um exemplo do caso em que o mensurando já é uma função linear das grandezas das quais depende, com coeficientes c_i = +1. Segue da Equação (10) que, se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$ e se as constantes c_i = +1 ou -1, então $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u^2(x_i)$.

5.1.6 Se Y é da forma $Y = c\,X_1^{p_1}X_2^{p_2}...X_N^{p_N}$ e os expoentes p_i são números positivos ou negativos conhecidos, tendo incertezas desprezíveis, a variância combinada, Equação (10), pode ser expressa por

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[p_i u(x_i)/x_i]^2 \qquad (12)$$

Esta equação é da mesma forma que (11a), mas com a variância combinada $u_c^2(y)$ expressa como uma *variância combinada relativa* $[u_c(y)/y]^2$, e a variância estimada $u^2(x_i)$ associada com cada estimativa de entrada expressa como uma *variância relativa estimada* $[u(x_i)/x_i]^2$ [A *incerteza-padrão combinada relativa* é $u_c(y)/|y|$ e a *incerteza-padrão relativa* de cada estimativa de entrada é $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ e $|x_i| \neq 0$.]

NOTA 1 Quando Y tem esta forma, sua transformação em uma função linear de variáveis (ver 5.1.5) é prontamente obtida fazendo-se $X_i = X_{i,0}(1+\delta_i)$, pois resulta a seguinte relação aproximada: $(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^N p_i\delta_i$. Por outro lado, a transformação logarítmica $Z = \ln Y$ e $W_i = \ln X_i$ leva a uma linearização exata em termos das novas variáveis: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^N p_i W_i$.

NOTA 2 Se cada p_i é igual a +1 ou -1, a Equação (12) torna-se $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[u(x_i)/x_i]^2$, o que mostra que, para este caso especial, a variância combinada relativa associada à estimativa y é simplesmente igual à soma das variâncias relativas estimadas, associadas com as estimativas de entrada x_i.

5.2 Grandezas de entrada correlacionadas

5.2.1 A Equação (10) e as equações dela decorrentes, tais como as Equações (11a) e (12), são válidas somente se as grandezas de entrada X_i são independentes ou não-correlacionadas (as variáveis aleatórias, não as grandezas físicas, que são supostas como sendo invariantes - ver 4.1.1, Nota 1). Se alguns dos X_i são significativamente correlacionados, as correlações devem ser levadas em consideração.

5.2.2 Quando as grandezas de entrada são correlacionadas, a expressão apropriada para a variância combinada $u_c^2(y)$ associada com o resultado de uma medição é

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j) \tag{13}$$

onde x_i e x_j são as estimativas de X_i e X_j e $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ é a covariância estimada associada com x_i e x_j. O grau de correlação entre x_i e x_j é caracterizado pelo **coeficiente de correlação** estimado (C.3.6)

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{14}$$

onde $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ e $-1 \le r(x_i, x_j) \le +1$. Se as estimativas x_i e x_j são independentes, $r(x_i, x_j) = 0$ e a variação numa delas não implica uma variação esperada na outra. (Ver C.2.8, C.3.6 e C.3.7 para discussão adicional.)

Em termos de coeficientes de correlação, que são mais prontamente interpretados do que covariâncias, o termo de covariância da Equação (13) pode ser escrito como

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{15}$$

Assim, a Equação (13) torna-se, com auxílio da Equação (11b),

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_i c_j\, u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{16}$$

NOTA 1 Para o caso muito especial em que *todas* as estimativas de entrada são correlacionadas, com coeficientes de correlação $r(x_i, x_j) = +1$, a Equação (16) se reduz a

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N}c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}u(x_i)\right]^2$$

A incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ é, então, simplesmente uma soma linear de termos que representa a variação da estimativa de saída y, gerada pela incerteza-padrão de cada estimativa de entrada x_i (ver 5.1.3). [Esta soma linear não deve ser confundida com a lei geral de propagação de erros, embora tenha uma forma similar; as incertezas-padrão não são erros (ver E.3.2).]

EXEMPLO Dez resistores, cada um com uma resistência nominal de R_i = 1 000 Ω, são calibrados com uma incerteza de comparação desprezível, em termos de um mesmo resistor padrão R_S de 1 000 Ω, caracterizado por uma incerteza-padrão $u(R_S)$ = 100 mΩ, tal como apresentado em seu certificado de calibração. Os resistores são conectados em série com fios de resistência desprezível, de forma a se obter uma resistência de referência R_{ref} de valor nominal de 10 kΩ. Assim, $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Já que $r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$ para cada par de resistores (veja F.1.2.3, Exemplo 2), a equação desta nota se aplica. Como para cada resistor $\partial f/\partial x_i = \partial R_{ref}/\partial R_i = 1$ e $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (ver F.1.2.3, Exemplo 2), esta equação produz a incerteza-padrão combinada de R_{ref}, $u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S) = 10 \times (100\ \text{m}\Omega) = 1\Omega$. O resultado $u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_S)\right]^{1/2} = 0{,}32\ \Omega$ obtido da Equação (10) é incorreto, pois não leva em conta que todos os valores calibrados dos dez resistores são correlacionados.

NOTA 2 As variâncias estimadas $u^2(x_i)$ e as covariâncias estimadas $u(x_i, x_j)$ podem ser consideradas como os elementos de uma matriz de covariância com elementos u_{ij}. Os elementos da diagonal u_{ii} da matriz são as variâncias $u^2(x_i)$, enquanto que os elementos fora da diagonal u_{ij} ($i \neq j$) são as covariâncias $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$. Se duas estimativas de entrada não são correlacionadas, sua covariância associada e os elementos correspondentes u_{ij} e u_{ji} da matriz de covariância são 0 (zero). Se as estimativas de entrada são todas não correlacionadas, todos os elementos fora da diagonal são zero e a matriz de covariância é diagonal (ver também C.3.5).

NOTA 3 Para fins de avaliação numérica, a Equação (16) pode ser escrita como

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j\, r(x_i, x_j)$$

onde Z_i é dado em 5.1.3, Nota 2.

NOTA 4 Se os X_i da forma especial considerada em 5.1.6 são correlacionados, então os termos

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}[p_i u(x_i)/x_i]\,[p_j u(x_j)/x_j] r(x_i, x_j)$$

devem ser adicionados ao membro da direita da Equação (12).

5.2.3 Considerem-se duas médias aritméticas $\bar{q}$ e $\bar{r}$ que estimam as esperanças μ_q e μ_r de duas grandezas q e r que variam aleatoriamente. Sejam também $\bar{q}$ e $\bar{r}$ calculados a partir de n pares independentes de observações simultâneas de q e r realizadas sob as mesmas condições de medição (ver B.2.15). A covariância (ver C.3.4) de $\bar{q}$ e $\bar{r}$ é, então, estimada por

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \tag{17}$$

onde q_k e r_k são as observações individuais das grandezas q e r, e $\bar{q}$ e $\bar{r}$ são calculados a partir das observações, e de acordo com a Equação (3). Se, de fato, as observações não são correlacionadas, espera-se que a covariância calculada fique próxima de 0.

Assim, a covariância estimada de duas grandezas de entrada correlacionadas X_i e X_j que são estimadas pelas médias $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_j$, determinadas por pares independentes de observações simultâneas repetidas, é dada por $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$, com $s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ calculada de acordo com a Equação (17). Esta aplicação da Equação (17) é uma avaliação do Tipo A da covariância. O coeficiente de correlação estimado de $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_j$ é obtido da Equação (14): $r(x_i, x_j) = r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/\left[s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)\right]$.

NOTA Exemplos em que é necessário usar covariâncias como calculadas pela Equação (17) são dados em H.2 e H.4.

5.2.4 Pode existir correlação significativa entre duas grandezas de entrada se o mesmo instrumento de medição, padrão de medição físico, ou dado de referência, tendo uma incerteza-padrão significativa, é usado na sua determinação. Por exemplo, se um dado termômetro é usado para determinar uma correção de temperatura requerida na estimativa do valor de uma grandeza de entrada X_i, e o mesmo termômetro é usado para determinar uma correção similar de temperatura requerida na estimativa da grandeza de entrada X_j, as duas grandezas de entrada poderiam estar significativamente correlacionadas. Contudo, se X_i e X_j, neste exemplo, são redefinidos para serem grandezas não-corrigidas, e as grandezas que definem a curva de calibração para o termômetro estão incluídas como grandezas de entrada adicionais, com incertezas-padrão independentes, a correlação entre X_i e X_j é eliminada. (Ver F.1.2.3 e F.1.2.4 para discussão adicional.)

5.2.5 Correlações entre grandezas de entrada não podem ser ignoradas quando presentes e significativas. As covariâncias associadas devem ser avaliadas experimentalmente variando, se possível, as grandezas de entrada correlacionadas (ver C.3.6, Nota 3), ou usando o conjunto de informações disponíveis sobre a variabilidade correlacionada das grandezas em questão (avaliação Tipo B de covariância). A intuição baseada em experiência anterior e no conhecimento geral (ver 4.3.1 e 4.3.2) é especialmente requerida quando se estima o grau de correlação entre grandezas de entrada decorrentes do efeito de influências comuns, como temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade. Em muitos casos, felizmente, os efeitos de tais influências têm interdependência desprezível e as grandezas de entrada afetadas podem ser supostas não-correlacionadas. Entretanto, se elas não podem ser supostas não-correlacionadas, as próprias correlações podem ser evitadas se as influências comuns são introduzidas como grandezas de entrada independentes adicionais como indicado em 5.2.4.

6 Determinando a incerteza expandida

6.1 Introdução

6.1.1 A Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho sobre a Declaração de Incertezas na qual este Guia está baseado (ver Introdução), e as Recomendações 1 (CI-1981) e 1 (CI-1986) do CIPM, aprovando e ratificando a INC-1 (1980) (ver A.2 e A.3), advogam o uso da incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ como o parâmetro para expressar quantitativamente a incerteza do resultado de uma medição. De fato, na segunda de suas recomendações, o CIPM solicitou que o que é agora designado incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ seja usado "por todos os participantes no fornecimento de resultados de todas as comparações internacionais ou outros trabalhos realizados sob os auspícios do CIPM e dos seus Comitês Consultivos".

6.1.2 Embora $u_c(y)$ possa ser universalmente usada para expressar a incerteza de um resultado de medição, em algumas aplicações comerciais, industriais e regulamentadoras, e quando a saúde e a segurança estão em questão, é muitas vezes necessário fornecer uma medida de incerteza que defina um intervalo em torno do resultado da medição com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que poderiam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. A existência desse requisito foi reconhecida pelo Grupo de Trabalho e levou ao parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980). Ela está também refletida na Recomendação 1 (CI-1986) do CIPM.

6.2 Incerteza expandida

6.2.1 A medida adicional de incerteza que satisfaz o requisito de fornecer um intervalo do tipo indicado em 6.1.2 é denominada *incerteza expandida* e é representada por U. A incerteza expandida U é obtida, multiplicando-se a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ por um *fator de abrangência* k:

$$U = ku_c(y) \tag{18}$$

O resultado de uma medição é então convenientemente expresso como $Y = y \pm U$, que é interpretado de forma a significar que a melhor estimativa do valor atribuível ao mensurando Y é y, e que $y - U$ a $y + U$ é um intervalo com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que podem ser razoavelmente atribuídos a Y. Tal intervalo é também expresso como $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Os termos **intervalo de confiança** (C.2.27, C.2.28) e **nível de confiança** (C.2.29) têm definições específicas em estatística e são somente aplicáveis a intervalos definidos por U quando certas condições são atendidas, incluindo a de que todos os componentes de incerteza que contribuem para $u_c(y)$ sejam obtidos de avaliações Tipo A. Portanto, neste *Guia*, o termo "confiança" não é utilizado para modificar o termo "intervalo" quando se refere ao intervalo definido por U. Pela mesma razão o termo "nível de confiança" (*confidence level*) não é usado em conexão com aquele intervalo, mas sim o termo "nível da confiança" (*level of confidence*). Mais especificamente, U é interpretado como definindo um intervalo em torno do resultado de medição que abrange uma extensa fração p da distribuição de probabilidade caracterizada por aquele resultado e sua incerteza-padrão combinada, sendo p a *probabilidade de abrangência* ou *nível da confiança* do intervalo.

6.2.3 Sempre que praticável, o nível da confiança p, associado com o intervalo definido por U, deve ser estimado e declarado. Deve ser reconhecido que, multiplicando-se $u_c(y)$ por uma constante, não há acréscimo de informação nova, mas a informação, previamente disponível, é apresentada de forma diferente. Entretanto, também deve ser reconhecido que, na maioria dos casos, o nível da confiança p (especialmente para valores de p próximos de 1) é um tanto incerto, não somente por causa do conhecimento limitado da distribuição de probabilidade caracterizada por y e $u_c(y)$ (especialmente nas extremidades), mas também por causa da incerteza da própria $u_c(y)$ (veja Nota 2 de 2.3.5, 6.3.2 e o Anexo G, especialmente G.6.6).

NOTA Ver 7.2.2 e 7.2.4, respectivamente, para o modo preferível de se declarar o resultado de uma medição quando a medida da incerteza é $u_c(y)$ ou U.

6.3 Escolhendo um fator de abrangência

6.3.1 O valor do fator de abrangência k é escolhido com base no nível da confiança requerido para o intervalo y - U a y + U. Em geral, k estará entre 2 e 3. Entretanto, para aplicações especiais, k pode estar fora desta faixa. Uma extensa experiência e o conhecimento pleno da utilização que se fará de um resultado de medição poderão facilitar a escolha de um valor apropriado de k.

NOTA Ocasionalmente, pode-se achar que uma correção conhecida b, para um efeito sistemático, não tenha sido aplicada ao resultado relatado de uma medição, mas, em vez disso, foi realizada uma tentativa de se levar em conta o efeito, aumentando a “incerteza” associada ao resultado. Isto deve ser evitado; somente em circunstâncias muito especiais correções para efeitos sistemáticos significativos conhecidos podem não ser aplicadas ao resultado de uma medição (ver F.2.4.5 para um caso específico e o modo de tratá-lo). A avaliação da incerteza de um resultado de medição não deve ser confundida com o estabelecimento de um limite de segurança associado a uma determinada grandeza.

6.3.2 Em tese, pode-se querer estar apto a escolher um valor específico do fator de abrangência k que proporcionaria um intervalo $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ correspondente a um dado nível da confiança p, tal como 95 ou 99 por cento; da mesma forma, para um dado valor de k, seria interessante estabelecer, inequivocamente, um nível da confiança associado com aquele intervalo. Entretanto, isso não é fácil de fazer na prática, porque requer um extenso conhecimento da distribuição de probabilidade caracterizada pelos resultados de medição y e sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$. Embora esses parâmetros sejam de importância crítica, eles são, por si próprios, insuficientes para o propósito de estabelecer intervalos tendo níveis da confiança exatamente conhecidos.

6.3.3 A Recomendação INC-1 (1980) não especifica como a relação entre k e p deve ser estabelecida. Esse problema é discutido no Anexo G, e um método preferível para sua solução aproximada é apresentado em G.4 e resumido em G.6.4. Entretanto, uma aproximação mais simples, discutida em G.6.6, é frequentemente adequada para situações de medição em que a distribuição de probabilidade caracterizada por y e $u_c(y)$ é aproximadamente normal e os graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$ são de tamanho significativo. Quando este for o caso, o que ocorre frequentemente na prática, pode-se supor que, tomando k = 2, é produzido um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 95 por cento, e que, tomando k = 3, é produzido um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 99 por cento.

NOTA Um método para estimar os graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$ é dado em G.4. A Tabela G.2 do Anexo G pode então ser usada para auxiliar a decidir se esta solução é apropriada para uma particular medição (ver G.6.6).

7 Relatando a incerteza

7.1 Orientação Geral

7.1.1 Em geral, quando se sobe na hierarquia de medição, mais detalhes são requeridos sobre como um resultado de medição e sua incerteza foram obtidos. Entretanto, em qualquer nível desta hierarquia, incluindo atividades comerciais e reguladoras do mercado, trabalhos de engenharia na indústria, instalações de calibração de escalão inferior, pesquisa e desenvolvimento industrial, pesquisa acadêmica, laboratórios de calibração e de padrões primários industriais, laboratórios nacionais de metrologia e o BIPM, todas as informações necessárias para a reavaliação da medição devem estar disponíveis para terceiros que possam delas precisar. A diferença primária é que nos níveis inferiores da cadeia hierárquica mais informações do que as necessárias podem estar disponíveis sob a forma de relatórios publicados de sistemas de ensaio e de calibração, especificações de ensaios, certificados de ensaios e de calibração, manuais de instruções, normas internacionais, normas nacionais e regulamentações locais.

7.1.2 Quando os detalhes de uma medição, incluindo o modo como a incerteza do resultado foi avaliada, são fornecidos por meio de referências a documentos publicados, como é frequentemente o caso quando os resultados de calibração são relatados em um certificado, é imperativo que essas publicações sejam mantidas atualizadas, de forma a permanecerem consistentes com o procedimento de medição realmente em uso.

7.1.3 Numerosas medições são feitas a cada dia na indústria e no comércio sem nenhum registro explícito da incerteza. Entretanto, muitas são executadas com instrumentos sujeitos a calibrações periódicas ou a inspeção legal. Se for de conhecimento que os instrumentos estão em conformidade com suas especificações ou com os documentos normativos existentes e aplicáveis, as incertezas de suas indicações podem ser inferidas a partir daquelas especificações ou destes documentos normativos.

7.1.4 Embora na prática o montante de informações necessárias para documentar um resultado de medição dependa da utilização pretendida para ele, o princípio básico sobre o que é requerido permanece inalterado: quando se registra o resultado de uma medição e sua incerteza, é preferível errar por excesso no fornecimento de informações a fornecê-las com escassez. Por exemplo, deve-se

a) descrever claramente os métodos utilizados para calcular o resultado da medição e sua incerteza a partir de observações experimentais e dados de entrada;

b) listar todos os componentes da incerteza e documentar amplamente como foram avaliados;

c) apresentar a análise dos dados de tal forma que cada um dos passos importantes possa ser prontamente seguido e que os cálculos do resultado relatado possam ser independemente repetidos, se necessário;

d) fornecer todas as correções e constantes utilizadas na análise e suas fontes.

Um modo de verificar a lista acima é se perguntar: “Terei fornecido suficiente informação, de maneira suficientemente clara, de modo que meu resultado possa ser atualizado no futuro se novas informações ou dados se tornarem disponíveis?”

7.2 Orientação específica

7.2.1 Quando se relata o resultado de uma medição, e quando a medida da incerteza é a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, deve-se:

a) fornecer uma descrição completa de como o mensurando Y é definido;

b) fornecer a estimativa y do mensurando Y e sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$; as unidades de y e $u_c(y)$ devem ser sempre fornecidas;

c) incluir a incerteza-padrão combinada relativa $u_c(y) / | y |$, $| y | \neq 0$, quando apropriado;

d) fornecer a informação descrita em 7.2.7, ou fazer referência a documentos publicados que a contenha.

Se julgado útil aos pretensos usuários do resultado da medição para, por exemplo, ajudá-los em futuros cálculos de fatores de abrangência, ou para auxiliá-los a compreender a medição, podem-se indicar

— os graus de liberdade efetivos estimados ν_{eff} (ver G.4);

— as incertezas-padrão combinadas Tipo A e Tipo B, $u_{cA}(y)$ e $u_{cB}(y)$, e os seus graus de liberdade efetivos estimados ν_{effA} e ν_{effB} (ver G.4.1, Nota 3).

7.2.2 Quando a medida da incerteza é $u_c(y)$, é preferível declarar o resultado numérico da medição de uma dentre as quatro maneiras seguintes, de modo a evitar uma má compreensão. (A grandeza cujo valor está sendo relatado é suposta como sendo um padrão de massa com massa nominal m_S de 100 g; as palavras entre parênteses podem ser omitidas para maior simplicidade se u_c está definida em alguma outra parte do documento que relata o resultado.)

1) “m_S = 100,021 47 g com u_c = 0,35 mg (uma incerteza-padrão combinada).”

2) “m_S = 100,021 47(35) g, onde o número entre parênteses é o valor numérico de u_c (incerteza-padrão combinada) referido aos últimos dígitos correspondentes do resultado mencionado.”

3) "m_S = 100,021 47(0,000 35) g, onde o número entre parênteses é o valor numérico de u_c (incerteza-padrão combinada) expresso na unidade do resultado mencionado."

4) "m_S = (100,021 47 ± 0,000 35) g, onde o número após o símbolo ± é o valor numérico de u_c (incerteza-padrão combinada) e não um intervalo de confiança."

NOTA O formato ± deve ser evitado sempre que possível, pois tem sido tradicionalmente usado para indicar um intervalo correspondente a um alto nível da confiança e, assim, pode ser confundido com a incerteza expandida (ver 7.2.4). Além disso, embora o objetivo do alerta dado em 4) seja impedir tal confusão, escrever $Y = y \pm u_c(y)$ pode ainda ser mal interpretado, podendo implicar que isso representaria, especialmente quando o alerta é omitido acidentalmente, uma incerteza expandida com $k = 1$, e que o intervalo $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$ tem um nível da confiança p especificado, mais especificamente, aquele associado com a distribuição normal (ver G.1.3). Como indicado em 6.3.2 e no Anexo G, a interpretação de $u_c(y)$ dessa forma é geralmente difícil de justificar.

7.2.3 Quando se relata o resultado de uma medição, e quando a medida da incerteza é a incerteza expandida $U = k\,u_c(y)$, deve-se

a) fornecer uma descrição completa de como o mensurando Y é definido;

b) expressar o resultado de medição como $Y = y \pm U$ e fornecer as unidades de y e U;

c) incluir a incerteza expandida relativa $U / |y|$, $|y| \neq 0$, quando apropriado;

d) fornecer o valor de k usado para obter U [ou, para conveniência do usuário do resultado, fornecer ambos, k e $u_c(y)$];

e) fornecer o nível da confiança aproximado associado com o intervalo $y \pm U$ e explicar como foi determinado;

f) fornecer a informação descrita em 7.2.7 ou referir- se a um documento publicado que a contenha.

7.2.4 Quando a medida da incerteza é U, é preferível, para máxima clareza, declarar o resultado numérico da medição como no exemplo seguinte. (As palavras entre parênteses podem ser omitidas para maior simplicidade, se U, u_c e k estão definidos em alguma outra parte do documento que relata o resultado.)

> "m_S = (100,021 47 ± 0,000 79) g, onde o número após o símbolo ± é o valor numérico de $U = ku_c$ (uma incerteza expandida) com U determinado por u_c = 0,35 mg (uma incerteza-padrão combinada) e k = 2,26 (um fator de abrangência) avaliado com base na distribuição-*t* para $\nu = 9$ graus de liberdade. U define um intervalo estimado para ter um nível da confiança de 95 por cento."

7.2.5 Se uma medição determina simultaneamente mais de um mensurando, isto é, se ela fornece duas ou mais estimativas de saída y_i (ver H.2, H.3 e H.4), então, além de fornecer y_i e $u_c(y_i)$, devem-se fornecer também os elementos da matriz de covariância $u(y_i,y_j)$ ou os elementos $r(y_i,y_j)$ da **matriz de coeficientes de correlação** (C.3.6, Nota 2) (preferivelmente, ambas as matrizes).

7.2.6 Os valores numéricos da estimativa y e da incerteza-padrão $u_c(y)$, ou da incerteza expandida U, não devem ser fornecidos com um número excessivo de algarismos. É geralmente suficiente fornecer $u_c(y)$ e U [assim como as incertezas-padrão $u(x_i)$ das estimativas de entrada x_i] com até no máximo dois algarismos significativos, embora, em alguns casos, seja necessário reter algarismos adicionais para evitar erros de arredondamento nos cálculos subsequentes.

Ao relatar resultados finais, às vezes pode ser apropriado arredondar incertezas para cima, em vez de arredondar até o algarismo mais próximo. Por exemplo, $u_c(y)$ = 10,47 ṃpode ser arredondada para 11 mΩ. Entretanto, deve prevalecer o bom senso, e um valor como $u(x_i)$ = 28,05 kHz deve ser arredondado para baixo, para 28 kHz. As estimativas de entrada e de saída devem ser arredondadas para ficarem consistentes com suas incertezas; por exemplo, se y = 10,057 62 mΩ com $u_c(y)$ = 27 mΩ, y deve ser arredondado para 10,058 Ω. Coeficientes de correlação devem ser fornecidos com exatidão de três algarismos se seus valores absolutos são próximos da unidade.

7.2.7 No relatório detalhado que descreve como o resultado da medição e sua incerteza foram obtidos, devem-se seguir as recomendações de 7.1.4 e, assim

a) fornecer o valor de cada estimativa de entrada x_i e de sua incerteza-padrão $u(x_i)$ juntamente com uma descrição sobre como eles foram obtidos;

b) fornecer as covariâncias estimadas ou os coeficientes de correlação estimados (preferencialmente ambos) associados com todas as estimativas de entrada correlacionadas, e os métodos utilizados para obtê-los;

c) fornecer os graus de liberdade da incerteza-padrão para cada estimativa de entrada e como eles foram obtidos;

d) fornecer a relação funcional $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ e, quando consideradas úteis, as derivadas parciais ou coeficientes de sensibilidade $\partial f / \partial x_i$. Adicionalmente, quaisquer desses coeficientes, quando determinados experimentalmente, devem também ser fornecidos.

NOTA Como a relação funcional f pode ser extremamente complexa ou não existir explicitamente, a não ser como um programa de computador, pode ser impossível fornecer f e suas derivadas. A função f pode, então, ser descrita em termos gerais, ou o programa usado pode ser citado por meio de uma referência apropriada. Nestes casos, é importante que esteja claro como a estimativa y do mensurando Y e sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ foram obtidas.

8 Resumo do procedimento para avaliação e expressão da incerteza

Os passos a serem seguidos na avaliação e expressão da incerteza do resultado de uma medição, tais como apresentados neste *Guia*, podem ser resumidos como:

1) Expresse, matematicamente, a relação entre o mensurando Y e as grandezas de entrada Xi das quais Y depende: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. A função f deve conter todas as grandezas, incluindo todas as correções e fatores de correção, que possam contribuir com um componente significativo de incerteza para o resultado da medição (ver 4.1.1 e 4.1.2).

2) Determine x_i, o valor estimado da grandeza de entrada X_i, seja com base em análise estatística de uma série de observações, seja por outros meios (ver 4.1.3).

3) Avalie a *incerteza-padrão* $u(x_i)$ de cada estimativa de entrada x_i. Para uma estimativa de entrada obtida através de análise estatística de uma série de observações, a incerteza-padrão é avaliada como descrito em 4.2 (*avaliação Tipo A da incerteza-padrão*). Para uma estimativa de entrada obtida por outros meios, a incerteza-padrão $u(x_i)$ é avaliada como descrito em 4.3 (*avaliação Tipo B da incerteza-padrão*).

4) Avalie as covariâncias associadas com quaisquer estimativas de entrada que sejam correlacionadas (ver 5.2).

5) Calcule o resultado da medição, isto é, a estimativa y do mensurando Y, a partir da relação funcional f, utilizando para as grandezas de entrada X_i as estimativas x_i obtidas no passo 2 (ver 4.1.4).

6) Determine a *incerteza-padrão* combinada $u_c(y)$ do resultado da medição y a partir das incertezas-padrão e covariâncias associadas com as estimativas de entrada, como descrito no Capítulo 5. Se a medição determina, simultaneamente, mais de uma grandeza de saída, calcule suas covariâncias (ver 7.2.5, H.2, H.3 e H.4).

7) Se for necessário fornecer uma *incerteza expandida* U, cujo propósito é prover um intervalo $y - U$ a $y + U$ com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição de valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando Y, multiplique a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ por um *fator de abrangência* k, tipicamente na faixa de 2 a 3, para obter $U = ku_c(y)$. Selecione k com base no nível da confiança requerido para o intervalo (ver 6.2, 6.3 e, especialmente, o Anexo G, que trata da seleção de um valor de k que produz um intervalo tendo um nível da confiança próximo de um valor especificado).

8) Relate o resultado da medição y juntamente com sua incerteza-padrão $u_c(y)$ ou incerteza expandida U, como tratado em 7.2.1 e 7.2.3; use um dos formatos recomendados em 7.2.2 e 7.2.4. Descreva, como também delineado no Capítulo 7, como y e $u_c(y)$ ou U foram obtidos.

Anexo A

Recomendações do Grupo de Trabalho e do CIPM

A.1 Recomendações INC-1 (1980)

O Grupo de Trabalho sobre Declaração de Incertezas (ver Prefácio) foi convocado em outubro de 1980 pelo Birô Internacional de Pesos e Medidas (BIPM) em resposta à solicitação do Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM). Este Grupo preparou um relatório detalhado para consideração do CIPM, o qual resultou na Recomendação INC-1 (1980) [2]. A tradução desta Recomendação para o português é fornecida no item 0.7 deste *Guia* e o texto em francês, que é oficial, é apresentado a seguir [2]:

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1) L'incertitude d´un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

   A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques.

   B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

   Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère <<aléatoire>> ou <<systématique>> utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression <<incertitude systématique>> est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation: elle doit être évitée.

   Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2) Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les <<écarts-types>> estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3) Les composantes *de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types*. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4) L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'<<écart-types>>.

5) Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Recomendação 1 (CI-1981)

O CIPM reviu o relatório que lhe foi submetido pelo Grupo de Trabalho sobre Declaração de Incertezas e adotou as seguintes recomendações na sua 70ª reunião, ocorrida em outubro de 1981 [3]:

Recomendação 1 (CI-1981)

Expressão de incertezas experimentais

O Comitê Internacional de Pesos e Medidas

considerando

— a necessidade de encontrar uma maneira consensual de expressar incerteza de medição na metrologia,

— o esforço que tem sido dedicado a isso por muitas organizações ao longo de muitos anos,

— o encorajador progresso feito na procura de uma solução aceitável, resultado das discussões do Grupo de Trabalho sobre Expressão das Incertezas que se reuniu no BIPM em 1980,

reconhece

— que as propostas do Grupo de Trabalho podem formar a base de um eventual acordo sobre a expressão de incertezas,

recomenda

— que as propostas do Grupo de Trabalho tenham ampla divulgação;

— que o BIPM envide esforços no sentido de aplicar os princípios nelas contidos para as comparações internacionais a serem realizadas sob os seus auspícios nos anos vindouros;

— que outras organizações interessadas sejam encorajadas a examinar e testar essas propostas e dar ciência ao BIPM de seus comentários;

— que, após dois ou três anos, o BIPM faça um novo relatório sobre a aplicação dessas propostas.

A.3 Recomendação 1 (CI-1986)

O CIPM considerou ainda o assunto referente à expressão de incertezas na sua 75ª reunião, ocorrida em outubro de 1986, e adotou a seguinte recomendação [4]:

Recomendação 1 (CI-1986)

Expressão de incertezas em trabalho executado sob os auspícios do CIPM

O Comitê Internacional de Pesos e Medidas,

considerando a adoção da Recomendação INC-1 (1980) pelo Grupo de Trabalho sobre Declaração de Incertezas e a adoção da Recomendação 1 (CI-1981) pelo CIPM,

considerando que alguns membros de Comitês Consultivos possam querer esclarecimentos sobre esta Recomendação para fins de trabalho que se situe dentro do escopo do seu Comitê, especialmente com referência a comparações internacionais, *reconhece* que o parágrafo 5 da Recomendação INC-1 (1980) relativo a algumas aplicações, especialmente àquelas com significância comercial, está sendo presentemente considerado por um grupo de trabalho da Organização Internacional de Normalização (ISO), comum à ISO, OIML e IEC, com a concordância e cooperação do CIPM,

solicita que o parágrafo 4 da Recomendação INC-1 (1980) seja aplicado por todos os participantes ao fornecerem os resultados de todas as comparações internacionais ou outro trabalho realizado sob os auspícios do CIPM e de seus Comitês Consultivos e que a incerteza combinada das incertezas do Tipo A e do Tipo B seja fornecida em termos de um desvio-padrão.

Anexo B

Termos metrológicos gerais

B.1 Fonte das definições[1]

As definições aqui fornecidas dos termos metrológicos gerais relevantes para este *Guia* foram extraídas do *"Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia"* (abreviado para VIM), segunda edição, 1993[2] [6], publicado pela Organização Internacional de Normalização (ISO) em nome das sete organizações que apoiaram seu desenvolvimento e designaram os especialistas que o prepararam: Bureau Internacional de Poids e Mesures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry (IFCC), ISO, International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) e a International Organization of Legal Metrology (OIML). O VIM deve ser a primeira fonte a ser consultada quanto às definições dos termos não incluídos neste anexo ou no texto.

NOTA Alguns termos e conceitos estatísticos básicos são fornecidos no Anexo C. Outros termos como "valor verdadeiro", "erro" e "incerteza" são discutidos, mais detalhadamente, no Anexo D.

B.2 Definições

Como no Capítulo 0, nas definições que se seguem o uso de parênteses em torno de certas palavras de algumas expressões significa que as mesmas podem ser omitidas quando não houver possibilidade de gerar confusão.

Os termos em negrito em algumas notas são termos metrológicos adicionais ali definidos, seja explícita ou implicitamente (ver Referência [6]).

B.2.1

grandeza (mensurável)

atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado

NOTA 1 O termo "grandeza" pode referir-se a uma grandeza em sentido geral (ver Exemplo 1) ou a uma **grandeza específica** (ver Exemplo 2).

EXEMPLO 1 Grandezas em um sentido geral: comprimento, tempo, massa, temperatura, resistência elétrica, concentração de quantidade de matéria.

EXEMPLO 2 Grandezas específicas:

— comprimento de uma barra

— resistência elétrica de um fio

— concentração de etanol em uma dada amostra de vinho.

NOTA 2 Grandezas que podem ser classificadas, uma em relação à outra, em ordem crescente ou decrescente, são denominadas **grandezas de mesma natureza**.

---

[1] **Nota dos tradutores:**
A fonte mais atualizada para estes termos e outros termos correlatos é a nova edição do VIM publicada (original) em 2008 pelo JCGM do BIPM e (tradução) pelo Inmetro em 2009 como 3ª edição do VIM, abreviadamente VIM3. Recomenda-se que consultas a definições de termos metrológicos sejam feitas a este documento.

[2] **Nota de rodapé para a versão 2008:**
A terceira edição do vocabulário foi publicada em 2008, sob o título JCGM 200:2008, *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*.

NOTA 3 Grandezas de mesma natureza podem ser agrupadas em conjuntos de **categorias de grandezas**, por exemplo:

— trabalho, calor, energia

— espessura, circunferência, comprimento de onda.

NOTA 4 Os **símbolos das grandezas** são dados na ISO 31[3].

[VIM:1993, definição 1.1]

B.2.2

valor (de uma grandeza)

expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número

EXEMPLO 1 Comprimento de uma barra: 5,34 m ou 534 cm.

EXEMPLO 1 Massa de um corpo: 0,152 kg ou 152 g.

EXEMPLO 1 Quantidade de matéria de uma amostra de água (H_2O): 0,012 mol ou 12 mmol.

NOTA 1 O valor de uma grandeza pode ser positivo, negativo ou nulo.

NOTA 2 O valor de uma grandeza pode ser expresso de formas diferentes.

NOTA 3 Os valores de grandezas adimensionais são geralmente expressos como números puros.

NOTA 4 Uma grandeza que não pode ser expressa por uma unidade de medida multiplicada por um número, pode sê-lo por referência a uma escala de referência convencional ou a um procedimento de medição, ou a ambos.

[VIM:1993, definição 1.18]

B.2.3

valor verdadeiro (de uma grandeza)

valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica

NOTA 1 É um valor que seria obtido por uma medição perfeita.

NOTA 2 Valores verdadeiros são, por natureza, indeterminados.

NOTA 3 O artigo indefinido “um” é usado, preferivelmente ao artigo definido “o”, em conjunto com “valor verdadeiro” porque pode haver muitos valores consistentes com a definição de uma dada grandeza específica.

[VIM:1993, definição 1.19]

Comentário do *Guia*: Veja o Anexo D, em particular D.3.5, quanto às razões pelas quais o termo “valor verdadeiro” não é usado neste *Guia* e por que os termos “valor verdadeiro de um mensurando” (ou de uma grandeza) e “valor de um mensurando” (ou de uma grandeza) são vistos como equivalentes.

B.2.4

valor verdadeiro convencional (de uma grandeza)

valor atribuído a uma grandeza específica e aceito, às vezes por convenção, como tendo uma incerteza apropriada para uma dada finalidade

EXEMPLO 1 Em um determinado local, o valor atribuído a uma grandeza por meio de um padrão de referência pode ser tomado como um valor verdadeiro convencional.

EXEMPLO 2 Valor recomendado pelo CODATA[4] (1986) para a Constante de Avogadro: 6,022 136 7 x 10^{23} mol^{-1}.

---

[3] **Nota de rodapé para a versão 2008:**
A série ISO 31 está em revisão como uma série de documentos ISO 80000 e IEC 80000. (Alguns desses documentos foram já publicados.)

[4] **Nota dos Tradutores:**
O valor recomendado pelo CODATA (2010) é 6,022 141 29(27) x 10^{23} mol^{-1}.

NOTA 1 “Valor verdadeiro convencional” é às vezes denominado **valor designado, melhor estimativa** do valor, **valor convencional** ou **valor de referência**. “Valor de referência”, neste sentido, não deve ser confundido com “valor de referência” no sentido usado na Nota do definição 5.7 do VIM.

NOTA 2 Frequentemente, um número adequado de resultados de medições de uma grandeza é utilizado para estabelecer um valor verdadeiro convencional.

[VIM:1993, definição 1.20]

Comentários do *Guia*: Ver o Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.5

medição

conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza

NOTA As operações podem ser feitas automaticamente**.**

[VIM:1993, definição 2.1]

B.2.6

princípio de medição

base científica de uma medição

EXEMPLO 1 O efeito termoelétrico utilizado para a medição da temperatura.

EXEMPLO 2 O efeito Josephson utilizado para a medição da diferença de potencial elétrico.

EXEMPLO 3 O efeito Doppler utilizado para a medição da velocidade.

EXEMPLO 4 O efeito Raman utilizado para a medição do número de ondas das vibrações moleculares.

[VIM:1993, definição 2.3]

B.2.7

método de medição

sequência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições

NOTA Métodos de medição podem ser qualificados de várias maneiras, entre as quais:

— método de substituição

— método diferencial

— método “de zero”

[VIM:1993, definição 2.4]

B.2.8

procedimento de medição

conjunto de operações, especificamente descritas, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método

NOTA Um procedimento de medição é, usualmente, registrado em um documento, que algumas vezes é denominado “procedimento de medição” (ou **método de medição**) e, normalmente, tem detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações adicionais.

[VIM:1993, definição 2.5]

B.2.9

mensurando

grandeza específica submetida a medição

EXEMPLO Pressão de vapor de uma dada amostra de água a 20ºC.

NOTA A especificação de um mensurando pode requerer informações de outras grandezas como tempo, temperatura e pressão.

[VIM:1993, definição 2.6]

B.2.10

grandeza de influência

grandeza que não é o mensurando, mas que afeta o resultado da sua medição

EXEMPLO 1 Temperatura de um micrômetro usado na medição de comprimento.

EXEMPLO 2 Frequência na medição da amplitude de uma diferença de potencial em corrente alternada.

EXEMPLO 3 Concentração de bilirrubina na medição da concentração de hemoglobina em uma amostra de plasma sanguíneo humano.

[VIM:1993, definição 2.7]

Comentário do *Guia*: Entende-se que a definição de grandeza de influência inclui valores associados com padrões de medição, materiais e dados de referência dos quais o resultado de uma medição pode depender, assim como fenômenos (flutuações de curta duração do instrumento de medição) e grandezas (temperatura ambiente, pressão barométrica e umidade).

B.2.11

resultado de uma medição

valor atribuído a um mensurando, obtido por medição

NOTA 1 Quando um resultado é dado, deve-se indicar, claramente, se ele se refere:

— à indicação

— ao resultado não corrigido

— ao resultado corrigido

e se corresponde ao valor médio de várias medições.

NOTA 2 Uma expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza de medição.

[VIM:1993, definição 3.1]

B.2.12

resultado não corrigido

resultado de uma medição antes da correção devida a erro sistemático

[VIM:1993, definição 3.3]

B.2.13

resultado corrigido

resultado de uma medição após a correção devida a erro sistemático

[VIM:1993, definição 3.4]

B.2.14
exatidão de medição
grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor verdadeiro do mensurando

NOTA 1 "Exatidão" é um conceito qualitativo.

NOTA 2 O termo **precisão** não deve ser utilizado como "exatidão".

[VIM:1993, definição 3.5]

Comentário do *Guia*: Ver Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.15
repetibilidade (de resultados de medições)
grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição

NOTA 1 Estas condições são denominadas **condições de repetibilidade.**

NOTA 2 Condições de repetibilidade incluem:

— mesmo procedimento de medição

— mesmo observador

— mesmo instrumento de medição, utilizado nas mesmas condições

— mesmo local

— repetição em curto período de tempo.

NOTA 3 Repetibilidade pode ser expressa, quantitativamente, em função das características de dispersão dos resultados.

[VIM:1993, definição 3.6]

B.2.16
reprodutibilidade (de resultados de medições)
grau de concordância entre os resultados das medições de um mesmo mensurando efetuadas sob condições modificadas de medição

NOTA 1 Para que uma expressão da reprodutibilidade seja válida é necessário que sejam especificadas as condições modificadas.

NOTA 2 As condições modificadas podem incluir:

— princípio de medição

— método de medição

— observador

— instrumento de medição

— padrão de referência

— local

— condições de utilização

— tempo.

NOTA 3 A reprodutibilidade pode ser expressa quantitativamente em função das características da dispersão dos resultados.

NOTA 4 Os resultados aqui mencionados referem-se usualmente a resultados corrigidos.

[VIM:1993, definição 3.7]

B.2.17

desvio-padrão experimental

para uma série de n medições de um mesmo mensurando, a grandeza $s(q_k)$, que caracteriza a dispersão dos resultados, é dada pela fórmula:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(q_j - \bar{q}\right)^2}{n-1}}$$

onde q_k é o resultado da k-ésima medição e $\bar{q}$ é a média aritmética dos n resultados considerados

NOTA 1 Considerando a série de n valores como uma amostra de uma distribuição, $\bar{q}$ é uma estimativa não tendenciosa da média μ_q, e $s^2(q_k)$ é uma estimativa não tendenciosa da variância σ^2 desta distribuição.

NOTA 2 A expressão $s(q_k)/\sqrt{n}$ é uma estimativa do desvio-padrão da distribuição de $\bar{q}$ e é denominada **desvio-padrão experimental da média.**

NOTA 3 "Desvio-padrão experimental da média" é algumas vezes denominado, incorretamente, **erro padrão da média.**

NOTA 4 Adaptado de VIM:1993, definição 3.8.

Comentário do *Guia*: Alguns dos símbolos utilizados no VIM foram alterados a fim de se obter consistência com a notação utilizada no item 4.2 deste *Guia*.

B.2.18

incerteza (de medição)

parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando

NOTA 1 O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio-padrão (ou um dado múltiplo dele) ou a metade de um intervalo correspondente a um nível da confiança declarado.

NOTA 2 A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados de séries de medições e podem ser caracterizados por desvios-padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios-padrão, são avaliados por meio de distribuições de probabilidade supostas, baseadas na experiência ou em outras informações.

NOTA 3 Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor do mensurando, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

[VIM:1993, definição 3.9]

Comentário do *Guia*: destaca-se no VIM que esta definição e notas são idênticas àquelas deste *Guia* (ver 2.2.3).

B.2.19

erro (de medição)

resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando

NOTA 1 Uma vez que o valor verdadeiro não pode ser determinado utiliza-se, na prática, um valor verdadeiro convencional [ver VIM:1993, definiçôes 1.19 (B.2.3) e 1.20 (B.2.4)].

NOTA 2 Quando é necessário distinguir "erro" de "erro relativo", o primeiro é, algumas vezes, denominado **erro absoluto de medição**. Este termo não deve ser confundido com **valor absoluto de um erro**, que é o módulo do erro.

[VIM:1993, definição 3.10]

Comentário do *Guia*: Se o resultado de uma medição depende dos valores de outras grandezas, os erros dos valores medidos destas grandezas contribuem para o erro do resultado da medição. Veja, também, o Comentário do *Guia* para B.2.22 e para B.2.3.

B.2.20

erro relativo

erro de medição dividido por um valor verdadeiro do mensurando

NOTA Uma vez que um valor verdadeiro não pode ser determinado, utiliza-se, na prática, um valor verdadeiro convencional [ver VIM:1993, definições 1.19 (B.2.3) e 1.20 (B.2.4)].

[VIM:1993, definição 3.12]

Comentário do *Guia*: Ver Comentário do *Guia* para B.2.3.

B.2.21

erro aleatório

resultado de uma medição menos a média que resultaria de um infinito número de medições do mesmo mensurando efetuadas sob condições de repetibilidade

NOTA 1 Erro aleatório é igual a erro menos erro sistemático.

NOTA 2 Como somente um número finito de medições pode ser feito pode-se apenas determinar uma estimativa do erro aleatório.

[VIM:1993, definição 3.13]

Comentário do *Guia*: Ver Comentário do *Guia* para B.2.22.

B.2.22

erro sistemático

média que resultaria de um número infinito de medições do mesmo mensurando, efetuadas sob condições de repetibilidade, menos o valor verdadeiro do mensurando

NOTA 1 Erro sistemático é igual ao erro menos o erro aleatório.

NOTA 2 Analogamente ao valor verdadeiro, o erro sistemático e suas causas não podem ser completamente conhecidos.

NOTA 3 Para um instrumento de medição, ver “tendência” (VIM:1993, definição 5.25).

[VIM:1993, definição 3.14]

Comentário do *Guia*: O erro do resultado de uma medição (ver B.2.19) pode frequentemente ser considerado como oriundo de vários efeitos aleatórios e sistemáticos que contribuem com componentes individuais de erro para o erro do resultado. Ver também os Comentários do *Guia* para B.2.19 e B.2.3.

B.2.23

correção

valor adicionado algebricamente ao resultado não corrigido de uma medição para compensar um erro sistemático

NOTA 1 A correção é igual ao erro sistemático estimado com sinal trocado.

NOTA 2 Uma vez que o erro sistemático não pode ser perfeitamente conhecido, a compensação não pode ser completa.

[VIM:1993, definição 3.15]

B.2.24

fator de correção

fator numérico pelo qual o resultado não corrigido de uma medição é multiplicado para compensar um erro sistemático

NOTA Uma vez que o erro sistemático não pode ser perfeitamente conhecido, a compensação não pode ser completa.

[VIM:1993, definição 3.16]

Anexo C

Termos e conceitos estatísticos básicos

C.1 Fonte das definições

As definições de termos estatísticos básicos fornecidos neste anexo foram extraídas da Norma Internacional ISO 3534-1:1993[5] [7]. Esta deve ser a primeira fonte a ser consultada para a definição de termos não incluídos aqui. Alguns destes termos e seus conceitos correspondentes são aprofundados em C.3, seguindo-se à apresentação de suas definições formais em C.2, de forma a facilitar ainda mais o uso deste *Guia*. Entretanto, C.3, que também inclui as definições de alguns termos relacionados, não é baseado diretamente na ISO 3534-1:1993.

C.2 Definições

Como no Capítulo 2 e no Anexo B, o uso de parênteses em torno de certas palavras de alguns termos significa que elas podem ser omitidas se tal omissão não causar equívoco.

Os termos de C.2.1 a C.2.14 são definidos com referência a propriedades de populações. As definições dos termos C.2.15 a C.2.31 são relacionadas a um conjunto de observações (ver Referência [7]).

C.2.1
probabilidade

um número real na escala de 0 a 1 associado a um evento aleatório

NOTA Ela pode estar relacionada a uma frequência relativa de ocorrência de longo prazo ou a um grau de confiança de que um evento ocorrerá. Para um alto grau de confiança, a probabilidade está próxima de 1.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.1]

C.2.2
variável aleatória

uma variável que pode assumir qualquer um dos valores de um conjunto especificado de valores e com a qual está associada uma *distribuição de probabilidade* [ISO 3534- 1:1993, definição 1.3 (C.2.3)]

NOTA 1 Uma variável aleatória que só pode assumir valores isolados é chamada “discreta”. Uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo finito ou infinito é chamada “contínua”.

NOTA 2 A probabilidade de um evento A é designada por Pr(A) ou P(A).

[ISO 3534-1:1993, definição 1.2]

Comentário do *Guia*: O símbolo Pr(A) é usado neste *Guia* em lugar do símbolo $P_r(A)$ usado na ISO 3534-1:1993.

[5] **Nota de rodapé para a versão 2008:**
A ISO 3534-1:1993 foi cancelada e substituída pela ISO 3534-1:2006. Note-se que alguns termos e definições foram revisados. Para mais informações, consultar a última edição.

C.2.3

distribuição de probabilidade (de uma variável aleatória)

função que determina a probabilidade de uma variável aleatória assumir qualquer valor dado ou pertencer a um dado conjunto de valores

NOTA A probabilidade do conjunto inteiro de valores da variável aleatória é igual a 1.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.3]

C.2.4

função distribuição

função que determina, para cada valor x, a probabilidade de que a variável aleatória X seja menor que ou igual a x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

[ISO 3534-1:1993, definição 1.4]

C.2.5

função densidade de probabilidade (para uma variável aleatória contínua)

a derivada (quando existe) da função distribuição:

$$f(x) = dF(x)/\,dx$$

NOTA $f(x)dx$ é o “elemento de probabilidade”:

$$f(x)dx = Pr(x < X < x + dx)$$

[ISO 3534-1:1993, definição 1.5]

C.2.6

função massa de probabilidade

função que fornece, para cada valor x_i de uma variável aleatória discreta X, a probabilidade p_i de que a variável aleatória seja igual a x_i:

$$p_i = Pr(X = x_i)$$

[ISO 3534-1:1993, definição 1.6]

C.2.7

parâmetro

grandeza utilizada na descrição da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória

[ISO 3534-1:1993, definição 1.12]

C.2.8

correlação

a relação entre duas ou muitas variáveis aleatórias dentro de uma distribuição de duas ou mais variáveis aleatórias

NOTA A maioria das medidas estatísticas de correlação mede somente o grau de relação linear.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.13]

C.2.9
esperança (de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade)
valor esperado
média (populacional)

1) Para uma variável aleatória discreta X assumindo valores x_i com probabilidades p_i a esperança, se existe, é

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

sendo a soma estendida a todos os valores de x_i que podem ser assumidos por X.

2) Para uma variável aleatória contínua X tendo a função densidade de probabilidade $f(x)$ a esperança, se existe, é

$$\mu = E(X) = \int x f(x)\, dx$$

sendo a integral estendida sobre o(s) intervalo(s) de variação de X.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.18]

C.2.10
variável aleatória centrada
uma variável aleatória cuja esperança é igual a zero

NOTA Se a variável aleatória X tem esperança igual a μ, a variável aleatória centrada correspondente é $(X - \mu)$.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.21]

C.2.11
variância (de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade)
a esperança do quadrado da *variável aleatória centrada* [ISO 3534-1:1993, definição 1.21 (C.2.10)]:

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

[ISO 3534-1:1993, definição 1.22]

C.2.12
desvio-padrão (de uma variável aleatória ou de uma distribuição de probabilidade)
A raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

[ISO 3534-1:1993, definição 1.23]

C.2.13
momento central(*) **de ordem** q
em uma distribuição univariada, a esperança da q-ésima potência da variável aleatória centrada $(X - \mu)$:

$$E[(X - \mu)^q]$$

NOTA O momento central de ordem 2 é a *variância* [ISO 3534-1:1993, definição 1.22 (C.2.11)] da variável aleatória X.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.28]

(*) Se, na definição dos momentos, as grandezas X, $X - a$, Y, $Y - b$, etc. são substituídas por seus valores absolutos, isto é, $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$, etc., outros momentos chamados “momentos absolutos” são então definidos.

C.2.14
distribuição normal
distribuição de Laplace-Gauss
distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X, cuja função densidade de probabilidade é

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

para $-\infty < x < +\infty$.

NOTA μ é a esperança e σ é o desvio-padrão da distribuição normal.

[ISO 3534-1:1993, definição 1.37]

C.2.15
característica
uma propriedade que ajuda a identificar ou diferenciar itens de uma dada população

NOTA A característica pode ser ou quantitativa (por variáveis) ou qualitativa (por atributos).

[ISO 3534-1:1993, definição 2.2]

C.2.16
população
a totalidade de itens sob consideração

NOTA No caso de uma variável aleatória, considera-se que a distribuição de probabilidade [ISO 3534-1:1993, definição 1.3 (C.2.3)] define a população daquela variável.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.3]

C.2.17
frequência
o número de ocorrências de um dado tipo de evento ou o número de observações que se enquadram em uma classe especificada

[ISO 3534-1:1993, definição 2.11]

C.2.18
distribuição de frequência
a relação empírica entre os valores de uma característica e suas frequências ou suas frequências relativas

NOTA A distribuição pode ser apresentada graficamente como um *histograma* (ISO 3534-1:1993, definição 2.17), um *gráfico de barras* (ISO 3534-1:1993, definição 2.18), um *polígono de frequência cumulativa* (ISO 3534-1:1993, definição 2.19), ou como uma *tabela de dupla entrada* (ISO 3534-1:1993, definição 2.22).

[ISO 3534-1:1993, definição 2.15]

C.2.19
média aritmética
média (amostral)
a soma de valores dividida pelo número de valores

NOTA 1 O termo “média populacional” (*mean*) é geralmente utilizado quando se refere a um parâmetro de população (média da população) e o termo “média amostral” (*average*) quando se refere ao resultado de um cálculo sobre dados obtidos de uma amostra (média da amostra).

NOTA 2 A média amostral de uma amostra aleatória simples tomada de uma população é um estimador não-tendencioso da média populacional desta população. Entretanto, são por vezes utilizados outros estimadores, tais como a média geométrica ou harmônica, ou a mediana ou a moda.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.26]

C.2.20
variância

uma medida de dispersão, constituindo-se como a soma dos desvios quadráticos das observações em relação a sua média aritmética, sendo aquela soma dividida pelo número de observações menos um

EXEMPLO Para *n* observações x_1, x_2, ..., x_n, com média aritmética

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum x_i$$

a variância é

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

NOTA 1 A variância de amostra é um estimador não tendencioso da variância da população.

NOTA 2 A variância é $n/(n\text{-}1)$ vezes o momento central de ordem 2 (ver nota para ISO 3534-1:1993, definição 2.39).

[ISO 3534-1:1993, definição 2.33]

Comentário do *Guia*: A variância aqui definida é mais apropriadamente designada como "estimativa amostral da variância da população". A variância de uma amostra é usualmente definida como sendo o momento central de ordem 2 desta amostra (ver C.2.13 e C.2.22).

C.2.21
desvio-padrão

a raiz quadrada positiva da variância

NOTA O desvio-padrão da amostra é um estimador tendencioso do desvio-padrão da população.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.34]

C.2.22
momento central de ordem q

em uma distribuição de uma característica única, a média aritmética da q-ésima potência da diferença entre os valores observados e sua média $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

onde n é o número de observações

NOTA O momento central de ordem 1 é igual a zero.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.37]

C.2.23
estatística

uma função de variáveis aleatórias da amostra

NOTA Uma estatística, como uma função de variáveis aleatórias, é também uma variável aleatória e, como tal, assume diferentes valores de uma amostra para outra. O valor da estatística obtido quando se usam, nesta função, os valores observados pode ser utilizado num teste estatístico ou como uma estimativa de um parâmetro de população, tal como uma média ou um desvio-padrão.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.45]

C.2.24
estimação

a operação de, a partir de observações numa amostra, atribuir valores numéricos para os parâmetros de uma distribuição escolhida como o modelo estatístico da população da qual a amostra é extraída

NOTA Um resultado desta operação pode ser expresso como um valor único [estimativa pontual; ver ISO 3534-1:1993, definição 2.51 (C.2.26)] ou como uma estimativa de intervalo [ver ISO 3534-1:1993, definição 2.57 (C.2.27) e 2.58 (C.2.28)].

[ISO 3534-1:1993, definição 2.49]

C.2.25
estimador

estatística utilizada para estimar um parâmetro de população

[ISO 3534-1:1993, definição 2.50]

C.2.26
estimativa

valor de um estimador obtido como resultado de uma estimação

[ISO 3534-1:1993, definição 2.51]

C.2.27
intervalo de confiança bilateral

quando T_1 e T_2 são duas funções dos valores observados tais que, sendo θ um parâmetro de população a ser estimado, a probabilidade $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ é pelo menos igual a $(1 - \alpha)$ [onde $(1 - \alpha)$ é um número fixo, positivo e menor que 1], o intervalo entre T_1 e T_2 é um intervalo de confiança $(1 - \alpha)$ bilateral para θ

NOTA 1 Os limites T_1 e T_2 do intervalo de confiança são *estatísticas* [ISO 3534-1:1993, definição 2.45 (C.2.23)] e, como tais, geralmente assumem diferentes valores de amostra para amostra.

NOTA 2 Em uma série grande de amostras a frequência relativa dos casos nos quais o valor verdadeiro do parâmetro de população θ é coberto pelo intervalo de confiança é maior que ou igual a $(1 - \alpha)$.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.57]

C.2.28
intervalo de confiança unilateral

quando T é uma função dos valores observados tais que, sendo θ um parâmetro de população a ser estimado, a probabilidade $\Pr(T \geq \theta)$ [ou a probabilidade $\Pr(T \leq \theta)$] é pelo menos igual a $(1 - \alpha)$ [onde $(1 - \alpha)$ é um número fixo, positivo e menor do que 1], o intervalo a partir do menor valor possível de θ até T (ou o intervalo de T até o maior valor possível de θ) é um intervalo de confiança $(1 - \alpha)$ unilateral para θ

NOTA 1 O limite T do intervalo de confiança é uma *estatística* [ISO 3534-1:1993, definição 2.45 (C.2.23)] e, como tal, geralmente assume diferentes valores de amostra para amostra.

NOTA 2 Ver Nota 2 da ISO 3534-1:1993, definição 2.57 (C.2.27).

[ISO 3534-1:1993, definição 2.58]

C.2.29
coeficiente de confiança
nível de confiança

o valor $(1 - \alpha)$ da probabilidade associada com um intervalo de confiança ou um intervalo estatístico de abrangência [Ver ISO 3534-1:1993, definições 2.57 (C.2.27), 2.58 (C.2.28) e 2.61 (C.2.30).]

NOTA $(1 - \alpha)$ é frequentemente expresso como uma porcentagem.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.59]

C.2.30
intervalo estatístico de abrangência

intervalo sobre o qual se pode dizer que contém, com um dado nível da confiança, pelo menos uma proporção especificada da população

NOTA 1 Quando ambos os limites são definidos por estatísticas o intervalo é bilateral. Quando um dos dois limites não é finito ou consiste do limite absoluto da variável o intervalo é unilateral.

NOTA 2 Também denominado "intervalo estatístico de tolerância". Este termo não deve ser usado porque pode ser confundido com "intervalo de tolerância", que é definido na ISO 3534-2:1993.

[ISO 3534-1:1993, definição 2.61]

C.2.31
graus de liberdade

em geral, o número de termos numa suma menos o número de restrições sobre os termos da soma

[ISO 3534-1:1993, definição 2.85]

C.3 Elaboração de termos e conceitos

C.3.1 Esperança

A esperança de uma função $g(z)$ sobre uma função densidade de probabilidade $p(z)$ da variável aleatória z é definida por

$$E[g(z)] = \int g(z)\, p(z)\, dz$$

onde, da definição de $p(z)$, $\int p(z)\, dz = 1$. A esperança da variável aleatória z, designada por μ_z, e que também é denominada de valor esperado ou a média de z, é dada por

$$\mu \equiv E(z) = \int zp(z)\, dz$$

Ela é estimada, estatisticamente, por $\bar{z}$, a média aritmética ou média de n observações independentes z_i da variável aleatória z, cuja função densidade de probabilidade é $p(z)$

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 Variância

A variância de uma variável aleatória é a esperança do seu desvio quadrático em torno de sua esperança. Assim, a variância da variável aleatória z com função densidade de probabilidade $p(z)$ é dada por

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2\, p(z)\, dz$$

onde μ_z é a esperança de z. A variância $\sigma^2(z)$ pode ser estimada por

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(z_j - \bar{z}\right)^2$$

onde

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

e os z_i são n observações independentes de z.

NOTA 1 O fator $n - 1$ na expressão para $s^2(z_i)$ decorre da correlação entre z_i e $\bar{z}$ e reflete o fato de que há somente $n - 1$ itens independentes no conjunto $\{z_i - \bar{z}\}$.

NOTA 2 Se a esperança μ_z de z é conhecida, a variância pode ser estimada por

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2$$

A variância da média aritmética ou média das observações, em lugar da variância das observações individuais, é a medida apropriada da incerteza de um resultado de medição. A variância de uma variável z deve ser cuidadosamente distinguida da variância da média $\bar{z}$. A variância da média aritmética de uma série de n observações independentes z_i de z é dada por $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ e é estimada pela variância experimental da média

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Desvio-padrão

O desvio-padrão é a raiz quadrada positiva da variância. Conquanto uma incerteza-padrão do Tipo A seja obtida tomando-se a raiz quadrada da variância estatisticamente avaliada, é muitas vezes mais conveniente, quando se determina uma incerteza-padrão do Tipo B, avaliar primeiro o desvio-padrão equivalente não-estatístico e, então, obter a variância equivalente elevando-o ao quadrado.

C.3.4 Covariância

A covariância de duas variáveis aleatórias é uma medida de sua dependência mútua. A covariância de variáveis aleatórias y e z é definida por

$$\operatorname{cov}(y,z) = \operatorname{cov}(z,y) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(y,z) &= \operatorname{cov}(z,y)\\ &= \iint (y-\mu_y)(z-\mu_z)\, p(y,z)dydz\\ &= \iint y\, z\, p(y,z)\, dy\, dz - \mu_y\mu_z\end{aligned}$$

onde $p(y,z)$ é a função densidade de probabilidade conjunta das duas variáveis y e z. A covariância cov(y,z) [também simbolizada por $\nu(y,z)$] pode ser estimada por $s(y_i,z_i)$, obtida a partir de n pares independentes de observações simultâneas y_i e z_i de y e z,

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y}\right)\left(z_j - \bar{z}\right)$$

onde

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

e

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

NOTA A covariância estimada das duas médias $\bar{y}$ e $\bar{z}$ é dada por $s(\bar{y},\bar{z}) = s(y_i, z_i)/n$.

C.3.5 Matriz de covariância

Para uma distribuição de probabilidade multivariada a matriz V, cujos elementos *são* as variâncias e covariâncias das variáveis, é denominada matriz de covariância. Os elementos diagonais, $v(z,z) \equiv \sigma^2(z)$ ou $s(z_i,z_i) \equiv s^2(z_i)$, são as variâncias, enquanto que os elementos fora da diagonal, $v(y,z)$ ou $s(y_i,z_i)$, são as covariâncias.

C.3.6 Coeficiente de correlação

O coeficiente de correlação é uma medida da dependência mútua relativa de duas variáveis, igual à razão entre sua covariância e a raiz quadrada positiva do produto de suas variâncias. Assim

$$\rho(y,z) = \rho(z,y) = \frac{v(y,z)}{\sqrt{v(y,y)v(z,z)}} = \frac{v(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

com estimativas

$$r(y_i,z_i) = r(z_i,y_i) = \frac{s(y_i,z_i)}{\sqrt{s(y_i,y_i)s(z_i,z_i)}} = \frac{s(y_i,z_i)}{s(y_i)s(z_i)}$$

O coeficiente de correlação é um número puro tal que: $-1 \leq \rho \leq +1$ ou $-1 \leq r(y_{i,}z_i) \leq +1$

NOTA 1 Como ρ e r são números puros na faixa de -1 a +1 inclusive, enquanto as covariâncias são usualmente grandezas com dimensões físicas e magnitudes inconvenientes, os coeficientes de correlação são geralmente mais úteis que as covariâncias.

NOTA 2 Para distribuições de probabilidade multivariadas, a matriz de coeficientes de correlação é geralmente fornecida no lugar da matriz de covariância. Como $\rho(y, y) = 1$, e $r(y_i, y_i) = 1$, os elementos diagonais desta matriz são iguais à unidade.

NOTA 3 Se as estimativas de entrada x_i e x_j são correlacionadas (ver 5.2.2) e se uma alteração δ_i em x_i produz uma mudança δ_j em x_j, então o coeficiente de correlação associado com x_i e x_j é estimado, aproximadamente, por

$$r(x_i,x_j) \approx u(x_i)\delta_j/[u(x_j)\delta_i]$$

Esta relação pode servir de base para estimar experimentalmente coeficientes de correlação. Ela também pode ser usada para calcular a variação aproximada em uma estimativa de entrada devida a uma variação em outra caso seu coeficiente de correlação seja conhecido.

C.3.7 Independência

Duas variáveis aleatórias são estatisticamente independentes se sua distribuição de probabilidade conjunta é o produto de suas distribuições de probabilidade individuais.

NOTA Se duas variáveis aleatórias são independentes, sua covariância e coeficiente de correlação são nulos, mas o contrário não é necessariamente verdadeiro.

C.3.8 A distribuição-*t*; distribuição de Student

A distribuição-t ou distribuição de Student é a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua t cuja função densidade de probabilidade é

$$p(t,v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} \frac{\Gamma\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{v}{2}\right]} \left[1 + \frac{t^2}{v}\right]^{-(v+1)/2} \quad , \quad -\infty < t < +\infty$$

onde Γ é a função gama e $v > 0$. A esperança da distribuição-t é zero e sua variância é $v/(v-2)$ para $v > 2$. À medida que $v \to \infty$, a distribuição-t se aproxima de uma distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ (ver C.2.14).

A distribuição de probabilidade da variável $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ é a distribuição-t se a variável aleatória z é distribuída normalmente com esperança μ_z, onde $\bar{z}$ é a média aritmética de n observações independentes z_i de z, $s(z_i)$ é o desvio-padrão experimental das n observações, e $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ é o desvio-padrão experimental da média $\bar{z}$, com $\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Anexo D

Valor “verdadeiro”, erro e incerteza

O termo **valor verdadeiro** (B.2.3) tem sido tradicionalmente usado em publicações sobre incerteza. Não neste *Guia,* pelas razões apresentadas neste anexo. Como os termos “mensurando”, “erro” e “incerteza” são frequentemente mal interpretados, este anexo também fornece uma discussão adicional sobre as idéias básicas a eles associados, a fim de suplementar a discussão dada no Capítulo 3. Duas figuras são apresentadas para ilustrar por que o conceito de incerteza adotado neste *Guia* é baseado no resultado de medição e sua incerteza estimada, em vez de o ser nas grandezas desconhecíveis valor “verdadeiro” e erro.

D.1 O mensurando

D.1.1 O primeiro passo ao se efetuar uma medição é especificar o mensurando - a grandeza a ser medida; o mensurando não pode ser especificado por um valor, mas somente por uma descrição de uma grandeza. Entretanto, em princípio, um mensurando não pode ser *completamente* descrito sem um número infinito de informações. Assim, na medida em que deixa margem a interpretação, a definição incompleta do mensurando introduz, na incerteza do resultado de uma medição, um componente de incerteza que pode ou não ser significativo para a exatidão requerida da medição.

D.1.2 Comumente, a definição de um mensurando especifica certos estados e condições físicas.

EXEMPLO A velocidade do som no ar seco de composição (fração molar) N_2 = 0,780 8, O_2 = 0,209 5, Ar = 0,009 35 e CO_2 = 0,000 35, na temperatura T = 273,15 K e pressão p = 101 325 Pa.

D.2 A grandeza realizada

D.2.1 Idealmente, a grandeza realizada para medição deveria ser totalmente consistente com a definição do mensurando. Frequentemente, entretanto, tal grandeza não pode ser realizada e a medição é efetuada numa grandeza que é uma aproximação do mensurando.

D.3 O valor “verdadeiro” e o valor corrigido

D.3.1 O resultado da medição da grandeza realizada é corrigido pela diferença entre esta grandeza e o mensurando, de forma a prever qual teria sido o resultado da medição se a grandeza realizada tivesse, de fato, satisfeito, integralmente, a definição do mensurando. O resultado da medição da grandeza realizada é também corrigido para todos os outros efeitos sistemáticos significativos reconhecidos. Embora o resultado corrigido final seja algumas vezes considerado como a melhor estimativa do valor “verdadeiro” do mensurando, na realidade o resultado é simplesmente a melhor estimativa do valor da grandeza que se pretendia medir.

D.3.2 Como exemplo, suponha que o mensurando seja a espessura de uma determinada folha de material em uma temperatura especificada. O espécime é levado a uma temperatura próxima da especificada e sua espessura, em um lugar particular, é medida com um micrômetro. A espessura do material nesse lugar e temperatura, sob a pressão aplicada pelo micrômetro, é a grandeza realizada.

D.3.3 São então determinadas a temperatura do material no momento da medição e a pressão aplicada. O resultado não corrigido da medição da grandeza realizada é então corrigido levando-se em conta a curva de calibração do micrômetro, o afastamento entre a temperatura do espécime em relação à temperatura especificada, além da leve compressão do espécime sob a pressão aplicada.

D.3.4 O valor corrigido pode ser denominado a melhor estimativa do valor “verdadeiro”, “verdadeiro” no sentido de que ele é o valor de uma grandeza que se acredita que satisfaça completamente à definição do mensurando; porém, se o micrômetro tivesse sido aplicado a uma parte diferente da folha do material o mensurando realizado teria sido diferente, com um valor “verdadeiro” diferente. No entanto, aquele valor “verdadeiro” seria consistente com a definição do mensurando porque este não especificou que a espessura era para ser determinada num local em particular sobre a folha. Assim, neste caso, por causa de uma definição incompleta do mensurando, o valor “verdadeiro” tem uma incerteza que pode ser avaliada através de medições realizadas em diferentes partes da folha. Em algum nível, cada mensurando tem uma incerteza “intrínseca” que pode, em princípio, ser estimada de algum modo. Esta é a incerteza mínima com a qual um mensurando pode ser determinado, e cada medição que alcança tal incerteza pode ser considerada a melhor medição possível do mensurando. Para obter um valor da grandeza em questão com uma incerteza menor requer-se que o mensurando seja definido mais completamente.

NOTA 1 No exemplo, a especificação do mensurando deixa em dúvida muitos outros aspectos que podem, hipoteticamente, afetar a espessura: a pressão barométrica, a umidade, o comportamento da folha no campo gravitacional, a maneira pela qual ela é apoiada, etc.

NOTA 2 Embora um mensurando deva ser definido com detalhes suficientes para que qualquer incerteza decorrente de sua definição incompleta seja desprezível em comparação com a exatidão requerida para a medição, deve-se reconhecer que isto nem sempre é praticável. A definição pode, por exemplo, estar incompleta porque não especifica parâmetros que possam ter sido supostos, injustificadamente, como tendo efeito desprezível; ou pode implicar condições que poderão nunca ser satisfeitas inteiramente e cuja realização imperfeita é difícil de se levar em conta. Por exemplo, no caso do exemplo de D.1.2, a velocidade do som implica infinitas ondas planas de amplitudes muito pequenas. Na proporção em que a medição não satisfaz a estas condições, os efeitos não-lineares e de difração precisam ser considerados.

NOTA 3 A especificação inadequada do mensurando pode levar a discrepâncias entre os resultados de medições realizadas em laboratórios diferentes sobre grandezas que se supõe (algumas vezes equivocadamente) serem a mesma grandeza.

D.3.5 A expressão “valor verdadeiro de um mensurando” ou de uma grandeza (frequentemente abreviada para “valor verdadeiro") é evitada neste *Guia* porque a palavra “verdadeiro” é vista como redundante. “Mensurando” (ver B.2.9) significa “grandeza particular sujeita a medição”, portanto “valor de um mensurando” significa “valor de uma grandeza particular sujeita a medição”. Como “grandeza particular” é geralmente compreendida como significando uma grandeza definida ou especifica (ver B.2.1, Nota 1), o adjetivo “verdadeiro” em “valor verdadeiro de um mensurando” (ou em “valor verdadeiro de uma grandeza”) é desnecessário – o valor “verdadeiro” do mensurando (ou grandeza) é, simplesmente, o valor do mensurando (ou grandeza). Adicionalmente, como indicado na discussão acima, o valor “verdadeiro” único é somente um conceito idealizado.

D.4 Erro

Um resultado de medição corrigido não é o valor do mensurando – isto é, ainda contém erros – pois a medição da grandeza realizada é imperfeita devido a variações aleatórias das observações (efeitos aleatórios), da determinação inadequada de correções para efeitos sistemáticos, e do conhecimento incompleto de certos fenômenos físicos (também efeitos sistemáticos). Nem o valor da grandeza realizada nem o valor do mensurando podem ser conhecidos exatamente; tudo o que se pode saber são os seus valores estimados. No exemplo acima, o valor medido para a espessura da folha *pode* estar errado, isto é, pode diferir do valor do mensurando (a espessura da folha), porque cada uma das seguintes razões podem se combinar para contribuir para um erro desconhecido no resultado da medição:

a) pequenas diferenças entre as indicações do micrômetro quando ele é aplicado repetidamente à mesma grandeza realizada;

b) calibração imperfeita do micrômetro;

c) medição imperfeita da temperatura e da pressão aplicada;

d) conhecimento incompleto dos efeitos da temperatura, pressão barométrica e umidade da amostra ou do micrômetro, ou de ambos.

D.5 Incerteza

D.5.1 Conquanto os valores exatos das contribuições ao erro de um resultado de uma medição sejam desconhecidos e desconhecíveis, as *incertezas* associadas com os efeitos aleatórios e sistemáticos que contribuem para o erro podem ser avaliadas. Porém, mesmo que as incertezas avaliadas sejam pequenas, ainda assim não há garantia de que o erro no resultado da medição seja pequeno. Isto porque, na determinação de uma correção ou no julgamento sobre a extensão em que o conhecimento é incompleto, um efeito sistemático pode ter passado despercebido por não ter sido reconhecido como tal. Assim, a incerteza de um resultado de uma medição não é necessariamente uma indicação de o quanto o resultado da medição está próximo do valor do mensurando; ela é simplesmente uma estimativa de o quanto se está próximo do melhor valor consistente com o conhecimento atualmente disponível.

D.5.2 A incerteza de medição é assim uma expressão do fato de que, para um dado mensurando e um dado resultado de sua medição, não há um valor único, mas sim um infinito número de valores, dispersos em torno do resultado, todos eles consistentes com todas as observações e dados e com o conhecimento disponível sobre o mundo físico, e que podem ser atribuídos ao mensurando com diferentes graus de credibilidade.

D.5.3 Felizmente, em muitas situações práticas de medição, muito do que é discutido neste anexo não se aplica. Citem-se como exemplos situações em que o mensurando está adequadamente bem definido; padrões ou instrumentos são calibrados usando-se padrões de referência bem conhecidos rastreáveis a padrões nacionais; e em que as incertezas das correções de calibração são insignificantes comparadas às incertezas provenientes de efeitos aleatórios na indicação dos instrumentos ou devidas à limitação do número de observações (ver E.4.3). Não obstante, o conhecimento incompleto de grandezas de influência e de seus efeitos pode, muitas vezes, contribuir significativamente para a incerteza do resultado de uma medição.

D.6 Representação gráfica

D.6.1 A Figura (D.1) ilustra algumas das idéias discutidas no Capítulo 3 deste *Guia* e neste anexo. Ela ilustra por que o enfoque deste *Guia* está em incerteza e não em erro. O valor exato do erro de um resultado de uma medição é, em geral, desconhecido e impossível de se conhecer. Tudo o que se pode fazer é estimar os valores das grandezas de entrada, incluindo correções para efeitos sistemáticos reconhecíveis, juntamente com suas incertezas-padrão (desvios-padrão estimados), seja por meio de distribuições de probabilidade desconhecidas que são amostradas por observações repetidas, ou por meio de distribuições subjetivas ou *a priori* baseadas no conjunto de informações disponíveis e, então, calcular o resultado da medição a partir dos valores estimados das grandezas de entrada, e a incerteza-padrão combinada deste resultado a partir das incertezas-padrão daqueles valores estimados. Somente se há uma base sólida para se acreditar que tudo isto foi feito de maneira adequada, sem que se tenha passado por cima de nenhum efeito sistemático relevante, pode-se supor que o resultado da medição é uma estimativa confiável do valor do mensurando e que sua incerteza-padrão combinada é uma medida confiável de seu *possível* erro.

NOTA 1 Na Figura D.1 a) as observações são mostradas como um histograma para propósitos ilustrativos [ver 4.4.3 e a Figura 1 b)].

NOTA 2 A correção para um erro é igual ao negativo da estimativa do erro. Assim, na Figura D.1, e também na Figura D.2, uma seta que ilustra a correção para um erro tem comprimento igual ao da seta que teria ilustrado o próprio erro, mas elas apontam sempre em sentidos contrários. O texto da figura torna claro se uma seta em particular ilustra uma correção ou um erro.

D.6.2 A Figura D.2 mostra algumas das mesmas idéias ilustradas na Figura D.1, mas de uma maneira diferente. Além disso, ela também evidencia a idéia de que pode haver vários valores do mensurando se sua definição está incompleta [entrada *g)* da Figura D.2]. A incerteza que se origina do fato de a definição do mensurando estar incompleta, tal como medida pela variância, é avaliada por medições de múltiplas realizações do mensurando, usando-se o mesmo método, os mesmos instrumentos, etc. (ver D.3.4).

NOTA Na coluna intitulada “Variância”, as variâncias são entendidas como sendo as variâncias $u_i^2(y)$ definidas na Equação (11a) em 5.1.3; portanto, como ali mostrado, elas se somam linearmente.

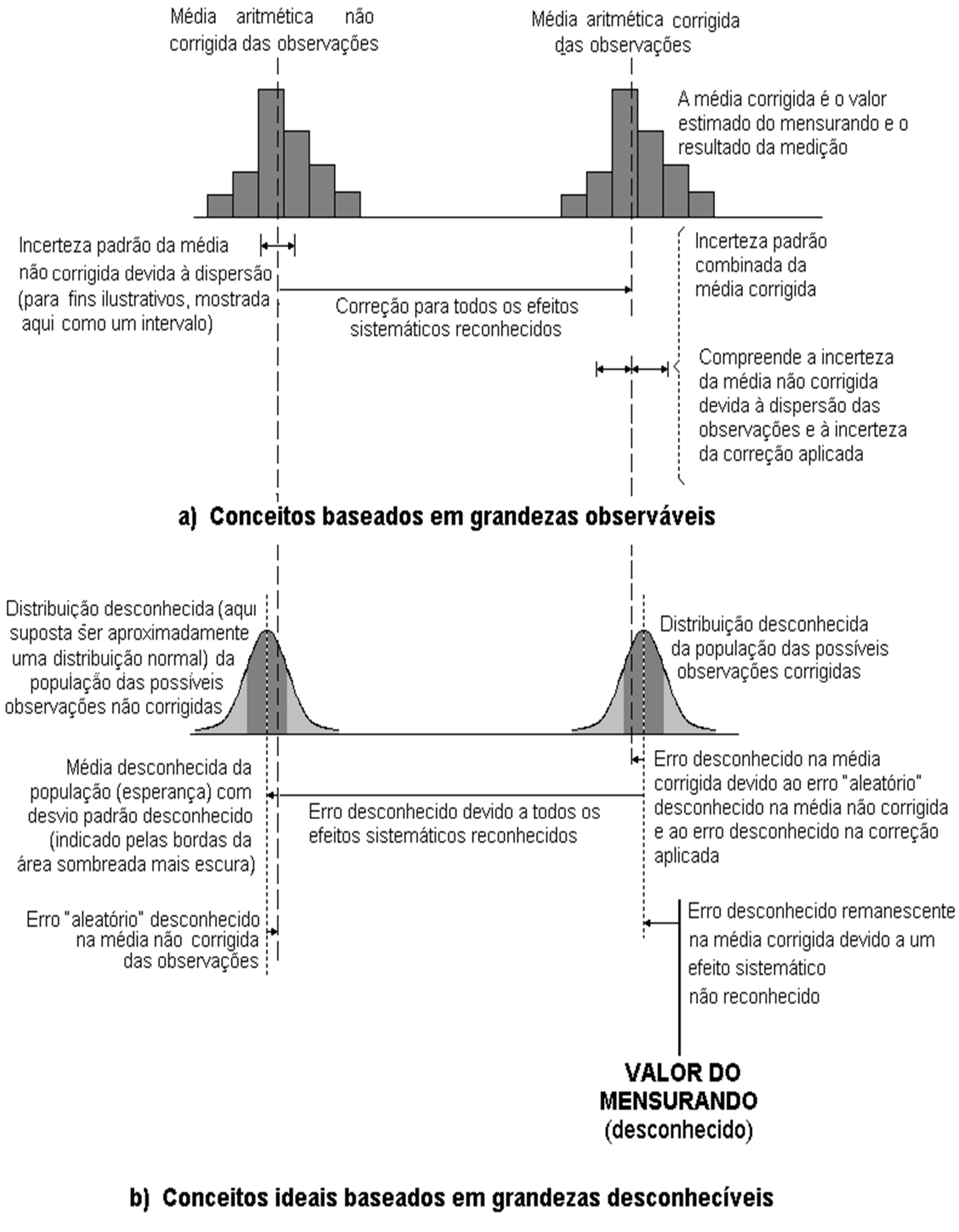


Figura D.1 — Ilustração gráfica de valor, erro, e incerteza

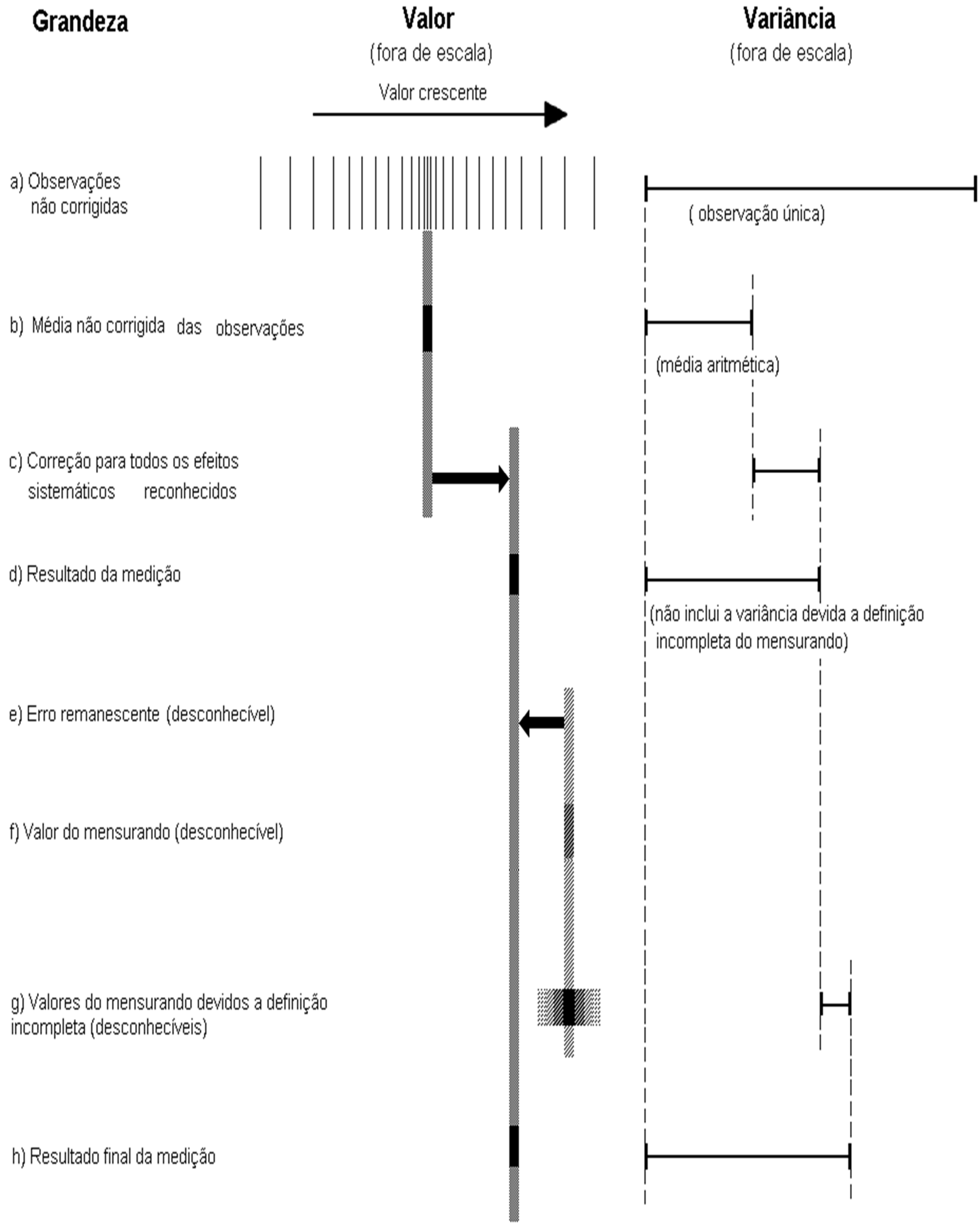


Figura D.2 Ilustração gráfica de valores, erro, e incerteza

Anexo E

Motivação e base para a Recomendação INC-1 (1980)

Este anexo traz uma breve discussão tanto da motivação como da base estatística para a Recomendação INC-1 (1980) do Grupo de Trabalho para Declaração de Incertezas sobre a qual se fundamenta este *Guia*. Para discussões mais aprofundadas, ver as referências [1, 2, 11, 12].

E.1 "Seguro", "aleatório", e "sistemático"

E.1.1 Este *Guia* apresenta um método amplamente aplicável para avaliar e expressar incerteza de medição. Ele fornece, em vez de um valor "seguro", um valor realístico da incerteza, baseado no conceito de que não há diferença inerente entre um componente de incerteza proveniente de um efeito aleatório e um componente proveniente de uma correção para um efeito sistemático (ver 3.2.2 e 3.2.3). O método apresenta-se, portanto, em contraste com certos métodos mais antigos que têm em comum as duas seguintes idéias.

E.1.2 A primeira idéia é a de que a incerteza relatada deve ser "segura" ou "conservadora", significando que nunca deveria errar pecando por ser pequena demais. De fato, como a avaliação da incerteza de um resultado de medição é problemática, ela era deliberadamente, e com frequência, tornada maior.

E.1.3 A segunda idéia é a de que as influências que dão origem às incertezas eram sempre reconhecidas como sendo ou "aleatórias" ou "sistemáticas", com as duas tendo naturezas diferentes; as incertezas associadas com cada uma delas eram combinadas na sua própria maneira e deviam ser relatadas separadamente (ou, quando um único valor era requerido, combinadas de algum modo específico). Na realidade, o método de combinação de incertezas era frequentemente projetado para satisfazer o requisito de segurança.

E.2 Justificativa para avaliações realísticas da incerteza

E.2.1 Quando o valor de um mensurando é relatado devem ser dadas a melhor estimativa de seu valor e a melhor avaliação da incerteza desta estimativa, pois, se a incerteza é passível de erro, não é normalmente possível decidir em qual direção dever-se-ia errar "seguramente". Uma declaração subdimensionada das incertezas pode fazer com que seja depositada confiança demasiada nos valores relatados, com consequências por vezes embaraçosas ou até mesmo desastrosas. Uma declaração deliberadamente superdimensionada das incertezas pode também ter repercussões indesejáveis. Poderia fazer com que os usuários de equipamentos de medição comprassem instrumentos mais dispendiosos do que o necessário, ou poderia fazer com que produtos caros fossem descartados desnecessariamente ou que os serviços de um laboratório de calibração fossem rejeitados.

E.2.2 Isso não quer dizer que aqueles que utilizam um resultado de medição não possam aplicar seus próprios fatores de multiplicação à incerteza declarada de forma a obter uma incerteza expandida que defina um intervalo com um nível da confiança especificado e que satisfaça suas próprias necessidades. Nem significa, em certas circunstâncias, que as instituições fornecedoras de resultados de medições não possam, rotineiramente, aplicar um fator que forneça uma incerteza expandida similar que satisfaça as necessidades de uma classe específica de usuários desses resultados. Entretanto, tais fatores (sempre a serem declarados) devem ser aplicados à incerteza tal como determinado por um método realístico, e somente *após* a incerteza ter sido assim determinada, de modo que o intervalo definido pela incerteza expandida tenha o nível da confiança requerido e a operação possa ser facilmente revertida.

E.2.3 Aqueles engajados em medições frequentemente precisam incorporar em suas análises os resultados de medições feitas por outros, com cada um desses resultados possuindo uma incerteza própria. Ao avaliar a incerteza de seu próprio resultado de medição, eles necessitam ter um melhor valor da incerteza de cada um dos resultados incorporados de terceiros, e não um valor "seguro". Adicionalmente, deve haver alguma maneira lógica e simples pela qual essas incertezas importadas possam ser combinadas com as incertezas das suas próprias observações para fornecer a incerteza de seu próprio resultado. A Recomendação INC-1 (1980) fornece tal maneira.

E.3 Justificativa para tratar identicamente todos os componentes da incerteza

O enfoque da discussão deste item é um exemplo simples que ilustra como este *Guia* trata exatamente da mesma forma, na avaliação da incerteza do resultado de uma medição, os componentes de incerteza provenientes de efeitos aleatórios e de correções para efeitos sistemáticos. Ele exemplifica, assim, o ponto de vista adotado neste *Guia* e citado em E.1.1, ou seja, que todos os componentes da incerteza são da mesma natureza e devem ser tratados identicamente. O ponto de partida da discussão é uma derivação simplificada da expressão matemática para a propagação dos desvios-padrão, denominada neste *Guia* como lei de propagação de incertezas.

E.3.1 Suponha que a grandeza de saída $z = f(w_1, w_2, .., w_N)$ dependa de N grandezas de entrada $w_1, w_2, ... w_N$, onde cada w_i seja descrito por uma distribuição de probabilidade apropriada. A expansão de f em torno das esperanças dos w_i, $E(w_i) \equiv \mu_i$, em uma série de Taylor de primeira ordem fornece, para pequenos desvios de z em torno de μ_z em termos de pequenos desvios dos w_i em torno dos μ_i,

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i) \qquad \text{(E.1)}$$

onde todos os termos de maior ordem são considerados desprezíveis e $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$. O quadrado do desvio $z - \mu_z$ é então dado por

$$(z - \mu_z)^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}(w_i - \mu_i)\right]^2 \qquad \text{(E.2a)}$$

que pode ser escrito como

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 (w_i - \mu_i)^2 \ + \ 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j} \ (w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \qquad \text{(E.2b)}$$

A esperança do desvio quadrado $(z - \mu_z)^2$ é a variância de z, isto é, $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$ e, assim a Equação (E.2b) leva a

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial f}{\partial w_i}\right]^2 \sigma_i^2 \ + \ 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i}\frac{\partial f}{\partial w_j} \ \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \qquad \text{(E.3)}$$

Nesta expressão, $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ é a variância de w_i e $\rho_{ij} = \upsilon(w_i, w_j)/(\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ é o coeficiente de correlação de w_i e w_j, onde $\upsilon(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ é a covariância de w_i e w_j.

NOTA 1 σ_z^2 e σ_i^2 são, respectivamente, os momentos centrais de ordem 2 (ver C.2.13 e C.2.22) das distribuições de probabilidade de z e de w_i. Uma distribuição de probabilidade pode ser completamente caracterizada pela sua esperança, variância e momentos centrais de ordens mais altas.

NOTA 2 A Equação (13) em 5.2.2 [junto com a Equação (15)], que é usada para calcular a incerteza-padrão combinada, é idêntica à Equação (E.3), exceto que a Equação (13) é expressa em termos de estimativas das variâncias, desvios-padrão e coeficientes de correlação.

E.3.2 Na terminologia tradicional, a Equação (E.3) é frequentemente chamada a "lei geral de propagação de erros", uma denominação que é melhor aplicada a uma expressão da forma $\Delta z = \sum_{i=1}^{N} (\delta f / \delta w_i) \, \Delta w_i$, onde Δz é a variação em z devida a (pequenas) variações Δw_i em w_i [ver Equação (E.8)]. De fato, é apropriado denominar a Equação (E.3) de lei de propagação de incertezas, como é feito neste *Guia*, porque ela mostra como as incertezas das grandezas de entrada w_i, tomadas como iguais aos desvios-padrão das distribuições de probabilidade de w_i, se combinam para fornecer a incerteza da grandeza de saída z, se esta incerteza é considerada como sendo igual ao desvio-padrão da distribuição de probabilidade de z.

E.3.3 A Equação (E.3) também se aplica à propagação de múltiplos de desvios-padrão pois, se cada desvio-padrão σ_i é substituído por um múltiplo $k\sigma_i$, com o mesmo k para cada σ_i, o desvio-padrão da grandeza de saída z é substituído por $k\sigma_z$. Entretanto, ela não se aplica à propagação de intervalos de confiança. Se cada σ_i é substituído por uma grandeza δ_i que define um intervalo correspondente a um dado nível da confiança p, a grandeza resultante para z, δ_z, não definirá um intervalo correspondente ao mesmo valor de p, a não ser que todos os w_i sejam descritos por distribuições normais. Nenhuma de tais suposições quanto à normalidade das distribuições de probabilidade das grandezas w_i está implícita na Equação (E.3). Mais especificamente, se na Equação (10), em 5.1.2, cada incerteza-padrão $u(x_i)$ é avaliada por meio de repetidas observações independentes e multiplicada pelo fator-t apropriado para seus graus de liberdade para um valor particular de p (digamos, p = 95 por cento), a incerteza da estimativa y não irá definir um intervalo correspondendo àquele valor de p (ver G.3 e G.4).

NOTA O requisito de normalidade, quando se propagam intervalos de confiança usando a Equação (E.3), pode ser uma das razões para a histórica separação dos componentes de incerteza derivados de observações repetidas, assumidos como normalmente distribuídos, daqueles componentes avaliados por estimativas de limites superior e inferior.

E.3.4 Considere o seguinte exemplo: z depende somente de uma grandeza de entrada w, $z = f(w)$, onde w é estimado pela média de n valores w_k de w; estes n valores são obtidos de n observações repetidas independentes q_k de uma variável aleatória q; e w_k e q_k são relacionados por

$$w_k = \alpha + \beta q_k \tag{E.4}$$

Aqui α é um deslocamento ou desvio "sistemático" constante comum a cada observação, e β é um fator de escala comum. O deslocamento e o fator de escala, embora fixos durante as observações, são supostos como caracterizados por distribuições de probabilidade *a priori*, com α e β sendo as melhores estimativas das esperanças dessas distribuições.

A melhor estimativa de w é a média aritmética ou média amostral $\overline{w}$ obtida de

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\alpha + \beta q_k) \tag{E.5}$$

A grandeza z é, então, estimada por $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ e a estimativa $u^2(z)$ de sua variância $\sigma^2(z)$ é obtida da Equação (E.3). Se, para simplificar, se supõe $z = w$, de modo que a melhor estimativa de z é $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, então a estimativa $u^2(z)$ pode ser prontamente encontrada. Notando-se que, pela Equação (E.5),

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \overline{q}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n}$$

e designando as variâncias estimadas de α e β por $u^2(\alpha)$ e $u^2(\beta)$, respectivamente, e supondo ainda que as observações individuais são não-correlacionadas, obtém-se, da Equação (E.3),

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2\,(q_k)}{n} \tag{E.6}$$

onde $s^2(q_k)$ é a variância experimental das observações q_k calculada de acordo com a Equação (4) em 4.2.2, e $s^2(q_k)/n = s^2(\overline{q})$ é a variância experimental da média $\overline{q}$ [Equação (5), em 4.2.3].

E.3.5 Na terminologia tradicional, o terceiro termo do membro à direita da Equação (E.6) é chamado de contribuição “aleatória” à variância estimada $u^2(z)$ porque ele em geral decresce quando o número de observações n aumenta, enquanto que os dois primeiros termos são chamados contribuições “sistemáticas” porque não dependem de n.

De mais significância, em alguns tratamentos tradicionais de incerteza de medição questiona-se a Equação (E.6) porque nenhuma distinção é feita entre as incertezas oriundas de efeitos sistemáticos e as que decorrem de efeitos aleatórios. Condena-se, em particular, a combinação de variâncias obtidas de distribuições de probabilidade *a priori* com aquelas obtidas de distribuições baseadas em frequência, pois o conceito de probabilidade é considerado aplicável *somente* a eventos que podem ser repetidos um grande número de vezes sob condições essencialmente iguais, com a probabilidade *p* de um evento ($0 \le p \le 1$) indicando a *frequência relativa* com a qual o evento irá ocorrer.

Em contraste com este ponto de vista de probabilidade baseada em frequências, outro ponto de vista igualmente válido é aquele em que a probabilidade é uma medida do *grau de credibilidade* de que um evento irá ocorrer [13, 14]. Por exemplo, suponha que alguém tenha a oportunidade de ganhar uma pequena soma de dinheiro D e que se trate de um apostador racional. Se o apostador é indiferente quanto à escolha das duas possibilidades seguintes, seu grau de credibilidade na ocorrência do evento A é p = 0,5.

1) receber D se o evento A ocorrer, porém não receber nada se ele não ocorrer;

2) receber D se o evento A não ocorrer, porém não receber nada se ele ocorrer.

A Recomendação INC-1 (1980) sobre a qual se fundamenta este *Guia* adota implicitamente tal ponto de vista de probabilidade, uma vez que considera expressões tais como a Equação (E.6) como a maneira adequada de calcular a incerteza-padrão combinada de um resultado de uma medição.

E.3.6 Existem três vantagens distintas em se adotar uma interpretação de probabilidade baseada no grau de credibilidade, no desvio-padrão (incerteza-padrão) e na lei de propagação de incertezas [Equação (E.3)] como bases para avaliação e expressão da incerteza de medição, como tem sido feito neste *Guia*:

a) a lei da propagação de incertezas permite que a incerteza-padrão combinada de um resultado seja prontamente incorporada na avaliação da incerteza-padrão combinada de outro resultado no qual a primeira é utilizada;

b) a incerteza-padrão combinada pode servir de base para calcular intervalos que correspondam, de forma realista, a seus níveis da confiança requeridos; e

c) é desnecessário classificar componentes como “aleatórios” ou “sistemáticos” (ou de qualquer outro modo) quando da avaliação da incerteza, porque todos os componentes da incerteza são tratados da mesma maneira.

O especificado em c) é altamente vantajoso porque tal categorização é frequentemente fonte de confusão; um componente de incerteza não é ou “aleatório” ou “sistemático”. Sua natureza é condicionada pela utilização feita da grandeza correspondente ou, mais formalmente, pelo contexto no qual a grandeza aparece no modelo matemático que descreve a medição. Assim, quando sua correspondente grandeza é usada em um contexto diferente, um componente “aleatório” pode se tornar um componente “sistemático” e *vice versa*.

E.3.7 Pelo motivo dado em c) acima, a Recomendação INC-1 (1980) não classifica os componentes de incerteza como “aleatórios” ou “sistemáticos”. Na realidade, no que se refere ao cálculo da incerteza-padrão combinada de um resultado de medição, não há necessidade de classificar componentes de incerteza e, assim, nenhuma necessidade real de qualquer esquema de classificação. Contudo, uma vez que denominações convenientes podem, às vezes, ser úteis na comunicação e discussão de idéias, a Recomendação INC-1 (1980) fornece um esquema para a classificação de dois métodos distintos pelos quais os componentes da incerteza podem ser avaliados, “A” e “B” (ver 0.7, 2.3.2 e 2.3.3).

Classificando-se os métodos usados para avaliar os componentes de incerteza evita-se o problema principal associado com a classificação dos próprios componentes, isto é, a dependência da classificação de um componente em relação à forma pela qual a grandeza correspondente é utilizada. Entretanto, classificar os métodos, em vez de os componentes, não impede que se agrupem os componentes individuais avaliados pelos dois métodos em grupos específicos para um propósito particular, em uma dada medição, por exemplo, quando se compara a variabilidade observada experimentalmente com a prevista teoricamente para os valores de saída de um sistema complexo de medição (ver 3.4.3).

E.4 Desvios-padrão como medidas de incerteza

E.4.1 A Equação (E.3) requer que, independente de como seja obtida a incerteza da estimativa de uma grandeza de entrada, ela seja avaliada como uma incerteza-padrão, isto é, um desvio-padrão estimado. Se, em vez disso, alguma alternativa “segura” é avaliada, ela não pode ser usada na Equação (E.3). Em particular, se o “limite máximo de erro” (o maior desvio concebível com relação à suposta melhor estimativa) é usado na Equação (E.3), a incerteza resultante terá um significado mal definido e não poderá ser utilizada por alguém que queira incorporá-la em cálculos subsequentes de incertezas de outras grandezas (ver E.3.3).

E.4.2 Quando a incerteza-padrão de uma grandeza de entrada não pode ser avaliada pela análise de resultados de um número adequado de observações repetidas, deve-se adotar uma distribuição de probabilidade baseada em um conhecimento que é muito menos extenso do que seria desejável. Isso não torna, entretanto, a distribuição inválida ou irreal; como todas as distribuições de probabilidade, ela é uma expressão do conhecimento existente.

E.4.3 As avaliações baseadas em observações repetidas não são necessariamente superiores àquelas obtidas por outros meios. Considere $s(\bar{q})$, o desvio-padrão experimental da média de n observações q_k independentes de uma variável q aleatória, distribuída normalmente [ver Equação (5), em 4.2.3]. A grandeza $s(\bar{q})$ é uma estatística (ver C.2.23) que estima $\sigma(\bar{q})$, o desvio-padrão da distribuição da probabilidade de $\bar{q}$, que é o desvio-padrão da distribuição dos valores de q que seria obtido se a medição fosse repetida um número infinito de vezes. A variância $\sigma^2[s(\bar{q})]$ de $s(\bar{q})$ é dada aproximadamente por

$$\sigma^2[s(\bar{q})] \approx \sigma^2(\bar{q})/2\nu \tag{E.7}$$

onde $\upsilon = n - 1$ é o número de graus de liberdade de $s(\bar{q})$ (ver G.3.3). Assim, o desvio-padrão relativo de $s(\bar{q})$, que é dado pela razão $\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ e que pode ser tomado como uma medida da incerteza relativa de $s(\bar{q})$, é aproximadamente $[2(n-1)]^{-1/2}$. Esta “incerteza da incerteza” de $\bar{q}$, que decorre de motivo puramente estatístico referente à amostragem limitada, pode ser surpreendentemente grande; para n = 10 observações, é de 24 por cento. Este e outros valores são dados na Tabela E.1, que mostra que o desvio-padrão de um desvio-padrão estatisticamente estimado não é desprezível para valores práticos de n. Pode-se, portanto, concluir que as avaliações do Tipo A da incerteza-padrão não são necessariamente mais confiáveis do que as avaliações do Tipo B, e que em muitas situações práticas de medições, onde o número de observações é limitado, os componentes obtidos por avaliações do Tipo B podem ser melhor conhecidos do que os componentes obtidos de avaliações do Tipo A.

E.4.4 Tem-se levantado a questão referente ao fato de que, enquanto as incertezas associadas com a aplicação de um método particular de medição são parâmetros estatísticos caracterizando variáveis aleatórias, existem exemplos de um “efeito verdadeiramente sistemático” cuja incerteza deve ser tratada diferentemente. Um exemplo é um erro no zero tendo um valor fixo desconhecido, o qual é o mesmo para cada determinação pelo método, devido a uma possível imperfeição no próprio princípio do método em si ou em uma de suas hipóteses. Mas, ao se reconhecer que tal possibilidade de erro no zero existe, e se sua magnitude é tida como sendo possivelmente significativa, então ele pode ser descrito por uma distribuição de probabilidade, ainda que construída de forma não muito elaborada, baseada no conhecimento que levou à conclusão de que este erro poderia existir e de que era significativo. Assim, se se considerar a probabilidade como uma medida do grau de credibilidade de que um evento irá ocorrer, a contribuição de tal efeito sistemático pode ser incluída na incerteza-padrão combinada de um resultado de medição pela avaliação dessa contribuição como uma incerteza-padrão de uma distribuição de probabilidade *a priori*, e tratando-a como qualquer outra incerteza-padrão de uma grandeza de entrada.

EXEMPLO A especificação de um particular procedimento de medição requer que uma determinada grandeza de entrada seja calculada a partir de uma específica expansão em série de potências cujos termos de maior ordem não são exatamente conhecidos. O efeito sistemático devido à impossibilidade de tratar com exatidão estes termos leva a um determinado erro no zero que é desconhecido e que não pode ser experimentalmente amostrado por repetições do procedimento. Assim, a incerteza associada com o efeito não pode ser avaliada e incluída na incerteza do resultado final de medição se uma interpretação de probabilidade baseada em frequência é seguida estritamente. Entretanto, uma interpretação de probabilidade com base no grau de credibilidade permite que a incerteza que caracteriza o efeito seja avaliada a partir de uma distribuição de probabilidade *a priori* (derivada do conhecimento disponível concernente aos termos conhecidos sem exatidão) e seja incluída no cálculo da incerteza-padrão combinada do resultado da medição, como qualquer outra incerteza.

Tabela E.1 — $\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, o desvio-padrão do desvio-padrão experimental da média $\bar{q}$ de n observações independentes de uma variável aleatória normalmente distribuída q, relativamente ao desvio-padrão daquela média(a) (b)

Número de observações n	$\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ (porcentagem)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Os valores dados foram calculados da expressão exata para $\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$ e não da expressão aproximada $[2(n-1)]^{-1/2}$.

(b) Na expressão $\sigma\,[s(\bar{q})]/\sigma(\bar{q})$, o denominador $\sigma(\bar{q})$) é a esperança $E[S/\sqrt{n}]$ e o numerador $\sigma[s(\bar{q})]$ é a raiz quadrada da variância $V[s/\sqrt{n}]$, onde S denota uma variável aleatória igual ao desvio-padrão de n variáveis aleatórias independentes $X_1, \ldots, X_n$, cada qual tendo uma distribuição normal com valor médio μ e variância σ^2:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

A esperança e a variância de S são dadas por:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}\sigma, \quad V[s] = \sigma^2 - E[S]^2$$

onde $\Gamma(x)$ é a função gama. Note-se que $E[S] < \sigma$ para um número n finito.

E.5 Uma comparação entre duas abordagens de incerteza

E.5.1 O enfoque deste *Guia* é dirigido ao resultado de medição e à sua incerteza avaliada, em vez de o ser às grandezas desconhecidas valor "verdadeiro" e erro (ver Anexo D). Este *Guia*, na realidade, ao adotar os pontos de vista operacionais de que o resultado de uma medição é simplesmente o valor atribuído ao mensurando e que a incerteza desse resultado é uma medida da dispersão dos valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando, desfaz a conexão muitas vezes confusa entre incerteza e as grandezas desconhecidas, valor "verdadeiro" e erro.

E.5.2 Esta conexão pode ser entendida interpretando-se a derivação da Equação (E.3), a lei de propagação de incertezas, do ponto de vista de valor "verdadeiro" e erro. Neste caso μ_i é visto como o desconhecido, valor "verdadeiro" único da grandeza de entrada w_i e cada w_i.é suposto ser relacionado ao seu valor "verdadeiro" μ_i por $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, onde ε_i é o erro em w_i. A esperança da distribuição de probabilidade de cada ε_i.é supostamente nula, $E(\varepsilon_i) = 0$, com variância $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. A Equação (E.1) torna-se, então

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\varepsilon_i \tag{E.8}$$

onde $\varepsilon_z = z - \mu_z$ é o erro em z e μ_z é o valor "verdadeiro" de z. Tomando-se a esperança do quadrado de ε_z, obtém-se uma equação idêntica, na forma, à Equação (E.3), mas onde $\sigma_z^2 = E(\varepsilon_z^2)$ é a variância de ε_z, e $\rho_{ij} = \upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j)/(\sigma_i^2\sigma_j^2)^{1/2}$ é o coeficiente de correlação de ε_i e ε_j, onde $\upsilon(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ é a covariância entre ε_i e ε_j. As variâncias e os coeficientes de correlação estão, portanto, associados aos *erros* das grandezas de entrada, em vez de estarem associados às próprias grandezas de entrada.

NOTA Assume-se que a probabilidade seja vista como uma medida do grau de credibilidade de que um evento irá ocorrer. Isso implica que um erro sistemático pode ser tratado da mesma forma que um erro aleatório e que ε_j representa ambos os tipos de erros.

E.5.3 Na prática, a diferença de pontos de vista não leva a uma diferença no valor numérico do resultado da medição ou da incerteza atribuída a esse resultado.

Primeiro, em ambos os casos as melhores estimativas disponíveis das grandezas de entrada w_i são utilizadas para obter a melhor estimativa de z através da função f; não faz nenhuma diferença *nos cálculos* se as melhores estimativas são vistas como os valores mais prováveis a serem atribuídos às grandezas em questão, ou como as melhores estimativas de seus valores "verdadeiros".

Segundo, uma vez que $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ e que os μ_i representam valores únicos e fixos e, por consequência, não têm incerteza, as variâncias e os desvios-padrão de ε_i e de w_i são idênticos. Isso significa que, em ambos os casos, as incertezas-padrão utilizadas como estimativas dos desvios-padrão σ_i, para obter a incerteza-padrão combinada do resultado da medição são idênticas e fornecem o mesmo valor numérico para aquela incerteza. Novamente, não faz nenhuma diferença *nos cálculos* se uma incerteza-padrão é vista como uma medida da dispersão da distribuição de probabilidade de uma grandeza de entrada ou como uma medida da dispersão da distribuição de probabilidade do erro dessa grandeza.

NOTA Se a assunção da nota de E.5.2 não tivesse sido feita, então a discussão deste item não faria sentido, a não ser que todas as estimativas das grandezas de entrada e as incertezas dessas estimativas fossem obtidas da análise estatística de observações repetidas, isto é, de avaliações do Tipo A.

E.5.4 Embora o enfoque baseado no valor "verdadeiro" e erro forneça os mesmos resultados numéricos que o enfoque adotado por este *Guia* (desde que a assunção da nota E.5.2 seja feita), o conceito de incerteza deste *Guia* elimina a confusão entre erro e incerteza (ver o anexo D). Na realidade, o enfoque operacional deste *Guia*, pelo qual é focalizado o valor observado (ou estimado) de uma grandeza e a variabilidade observada (ou estimada) desse valor, torna qualquer menção a erro inteiramente desnecessária.

Anexo F

Guia prático para avaliação de componentes de incerteza

Este anexo dá sugestões adicionais para avaliar componentes de incerteza. Tais sugestões são principalmente de natureza prática e têm o propósito de complementar aquelas já dadas no Capítulo 4.

F.1 Componentes avaliados a partir de observações repetidas: avaliação Tipo A de incerteza-padrão

F.1.1 Aleatoriedade e observações repetidas

F.1.1.1 Incertezas determinadas a partir de observações repetidas são frequentemente consideradas "objetivas", "estatisticamente rigorosas", etc., e como tais são contrastadas com incertezas avaliadas por outros meios. Isso sugere, erroneamente, que elas podem ser avaliadas meramente pela aplicação de fórmulas estatísticas às observações e que sua avaliação não requer a aplicação de algum julgamento.

F.1.1.2 Deve-se perguntar primeiro: "Em que extensão observações repetidas são repetições completamente independentes no contexto de um procedimento de medição?". Se todas as observações são de uma amostra única, e se a amostragem é parte do procedimento de medição porque o mensurando é a propriedade de um material (o que é diferente da propriedade de uma dada amostra do material), então as observações não foram independentemente repetidas; uma avaliação de um componente de variância decorrente de possíveis diferenças entre amostras deve ser adicionada à variância das observações repetidas realizadas sobre a amostra única.

Se a operação de zerar um instrumento é parte do procedimento de medição, o instrumento deve ser novamente zerado em cada repetição, mesmo havendo uma deriva desprezível durante o período em que as observações são feitas, pois há, potencialmente, uma incerteza estatisticamente determinável associada a essa operação.

Similarmente, se um barômetro deve ser lido, ele deve, em princípio, ser lido para cada repetição da medição (preferivelmente após perturbá-lo e deixá-lo voltar ao equilíbrio), pois pode haver uma variação tanto na indicação como na leitura, mesmo que a pressão barométrica tenha se mantido constante.

F.1.1.3 Deve-se perguntar, em seguida, se todas as influências que foram supostas ser aleatórias o são de fato. As médias e variâncias de suas distribuições são constantes ou haverá, talvez, durante o período das observações repetidas, uma deriva no valor de uma grandeza de influência não medida? Se há um número suficiente de observações, as médias aritméticas dos resultados da primeira e da segunda metade do período e seus desvios-padrão experimentais podem ser calculados e as duas médias comparadas uma com a outra, de forma a se julgar se a diferença entre elas é estatisticamente significativa e, assim, se há um efeito variando com o tempo.

F.1.1.4 Se os valores dos "serviços comuns" no laboratório (tensão e frequência da rede elétrica, pressão e temperatura da água, pressão de nitrogênio, etc.) são grandezas de influência, há, normalmente, um forte elemento não aleatório em suas variações que não pode ser ignorado.

F.1.1.5 Se o algarismo menos significativo de uma indicação digital varia continuamente durante uma observação devido a "ruído", é por vezes difícil deixar de selecionar, involuntariamente, valores pessoalmente preferidos desse algarismo. Um melhor procedimento é arranjar algum meio de congelar a indicação num instante arbitrário e registrar o resultado congelado.

F.1.2 Correlações

Grande parte da discussão neste item é também aplicável a avaliações do Tipo B da incerteza-padrão.

F.1.2.1 A covariância associada com as estimativas de duas grandezas de entrada X_i e X_j podem ser tomadas como nulas ou tratadas como insignificantes, se

a) X_i e X_j forem *não-correlacionadas* (as variáveis aleatórias, não as grandezas físicas, que são consideradas invariáveis [ver 4.1.1, Nota 1]), seja por exemplo em razão de terem sido medidas repetidamente, mas não simultaneamente, em experimentos independentes *diferentes*, ou seja em razão de representarem grandezas resultantes de avaliações *diferentes* que foram realizadas independentemente, ou se

b) qualquer das *grandezas* X_i ou X_j puder ser tratada como constante, ou se

c) não existirem informações suficientes para avaliar a covariância associada às estimativas de X_i e X_j.

NOTA 1 Por outro lado, em certos casos, tais como no exemplo da resistência de referência da Nota 1 de 5.2.2, fica evidente que as grandezas de entrada são totalmente correlacionadas e que as incertezas-padrão de suas estimativas combinam-se linearmente.

NOTA 2 Experimentos diferentes podem não ser independentes se, por exemplo, o mesmo instrumento é utilizado em cada um dos experimentos (ver F.1.2.3)

F.1.2.2 Pode-se determinar se duas grandezas de entrada observadas simultânea e repetidamente são ou não correlacionadas por meio da Equação (17), em 5.2.3. Por exemplo, se a frequência de um oscilador, não compensada ou mal compensada quanto à temperatura, for uma grandeza de entrada, se a temperatura ambiente for também uma grandeza de entrada e se ambas forem observadas simultaneamente, poderá haver uma correlação significativa revelada pela covariância calculada da frequência do oscilador e da temperatura ambiente.

F.1.2.3 Na prática, as grandezas de entrada são, frequentemente, correlacionadas, porque o mesmo padrão de medição físico, instrumento de medição, dado de referência, ou até mesmo o método de medição, tendo uma incerteza significativa, são usados na estimativa de seus valores. Sem perda de generalidade, suponha que duas grandezas de entrada X_1 e X_2, estimadas por x_1 e x_2, dependam de um conjunto de variáveis não correlacionadas $Q_1, Q_2, ..., Q_L$. Assim, $X_1 = F(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$ e $X_2 = G(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$, embora algumas dessas variáveis possam, na realidade, aparecer em somente uma função e não na outra. Se $u^2(q_l)$ é a variância estimada associada com a estimativa q_l de Q_l, então a variância estimada associada com x_1, é, da Equação (10) em 5.1.2,

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l}\right]^2 u^2(q_l) \qquad \text{(F.1)}$$

com uma expressão similar para $u^2(x_2)$. A covariância estimada associada a x_1 e x_2 é dada por

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l}\frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \qquad \text{(F.2)}$$

Em razão de somente aqueles termos para os quais $\delta F/\delta q_l \neq 0$ e $\delta G/\delta q_l \neq 0$, para um dado l, contribuírem para a soma, a covariância é zero se nenhuma variável é comum a ambos, F e G.

O coeficiente de correlação estimado $r(x_1, x_2)$, associado com as duas estimativas x_1 e x_2 é determinado por $u(x_1, x_2)$ [Equação (F.2)] e Equação (14) em 5.2.2, com $u(x_1)$ calculado da Equação (F.1) e $u(x_2)$ de uma expressão similar. [Ver também Equação (H.9), em H.2.3.] É também possível que a covariância estimada associada com duas estimativas de entrada tenha ambos componentes, um componente estatístico [ver Equação (17), em 5.2.3] e um componente que surge como discutido neste item.

EXEMPLO 1 Um resistor padrão R_S é usado na mesma medição para determinar tanto a corrente I como a temperatura t. A corrente é determinada medindo-se, com um voltímetro digital, a diferença de potencial nos terminais do padrão; a temperatura é determinada medindo-se, com uma ponte de resistência e com o padrão, a resistência $R_t(t)$ de um sensor resistivo de temperatura calibrado, cuja relação temperatura-resistência, na faixa de 15 ºC ≤ t ≤ 30 ºC, é $t = aR_t^2(t) - t_0$, onde a e t_0 são constantes conhecidas. Assim, a corrente é determinada por meio da relação $I = V_S/R_S$ e a temperatura através da relação $t = \alpha\,\beta^2(t)\,R_S^2 - t_0$, onde $\beta(t)$ é a razão medida $R_t(t)/R_s$ fornecida pela ponte.

Como apenas a grandeza R_S é comum à expressão de I e t, a Equação (F.2) fornece para a covariância de I e t

$$u(I,t) = \frac{\partial I}{\partial R_S}\frac{\partial t}{\partial R_S}u^2(R_S) = \left[-\frac{V_S}{R_S^2}\right](2\alpha\beta^2(t)R_S) = -\frac{2I(t + t_0)}{R_S^2}u^2(R_S)$$

(Por simplicidade de notação, neste exemplo é usado o mesmo símbolo para a grandeza de entrada e para sua estimativa.)

Para obter o valor numérico da covariância, substituem-se nesta expressão os valores numéricos das grandezas medidas I e t, e os valores de R_S e $u(R_S)$ dados no certificado de calibração do resistor padrão. A unidade de $u(I,t)$ é claramente A·℃, uma vez que a variância relativa $[u(R_S)/R_S]^2$ é uma grandeza adimensional.

Seja uma grandeza P relacionada com as grandezas de entrada I e t por $P = C_0I^2/(T_0 + t)$, onde C_0 e T_0 são constantes conhecidas, com incertezas desprezíveis $[u^2(C_0) \approx 0,\ u^2(T_0) \approx 0]$. A Equação (13) em 5.2.2 fornece então para a variância de P em termos das variâncias de I e t e de sua covariância

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_0 + t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0 + t)^2}$$

As variâncias $u^2(I)$ e $u^2(t)$ são obtidas através da aplicação da Equação (10) de 5.1.2 às relações $I = V_S/R_S$ e $t = \alpha\beta^2(t)R_S^2 - t_0$. Os resultados são

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$

$$u^2(t) = 4(t + t_0)^2\,u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t + t_0)^2\,u^2(R_S)/R_S^2$$

nos quais, para simplificar, supõe-se que as incertezas das constantes t_0 e a sejam também desprezíveis. Estas expressões podem ser prontamente avaliadas uma vez que $u^2(V_S)$ e $u^2(\beta)$ podem ser determinadas, respectivamente, a partir de leituras repetidas do voltímetro e da ponte de resistência. Naturalmente, quaisquer incertezas inerentes aos próprios instrumentos e aos procedimentos de medição empregados devem também ser levadas em conta quando $u^2(V_S)$ e $u^2(\beta)$ são determinados.

EXEMPLO 2 No exemplo da Nota 1 de 5.2.2, suponha-se que a calibração de cada resistor seja representada por $R_i = \alpha_i R_S$, com $u(\alpha_i)$ sendo a incerteza-padrão da razão medida α_i, tal como obtida em observações repetidas. Suponha-se ainda que $\alpha_i \approx 1$ para cada resistor e que $u(\alpha_i)$ seja essencialmente a mesma para cada calibração, de forma que $u(\alpha_i) = u(\alpha)$. Então, as equações (F.1) e (F.2) fornecem $u^2(R_i) = R_S^2\,u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ e $u(R_i,R_j) = u^2(R_S)$. Isso implica, pela Equação (14) em 5.2.2, que o coeficiente de correlação de quaisquer dois resistores ($i \neq j$) é

$$r(R_i,R_j) \equiv r_{ij} = \left\{1 + \left[\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right]^2\right\}^{-1}$$

Desde que $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$, se $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, $r_{i,j} \approx 0{,}5$; se $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$, $r_{i,j} \approx 0{,}990$; e se $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, $r_{i,j} \approx 1{,}000$. Assim, quando $u(\alpha) \rightarrow 0$, $r_{i,j} \rightarrow 1$ e $u(R_i) \rightarrow u(R_S)$.

NOTA Em geral, em calibrações por comparação, tais como neste exemplo, os valores estimados dos itens calibrados são correlacionados, com o grau de correlação dependendo da razão entre a incerteza da comparação e a incerteza do padrão de referência. Quando, como ocorre frequentemente na prática, a incerteza da comparação é desprezível com respeito à incerteza do padrão, os coeficientes de correlação são iguais a +1 e a incerteza de cada item de calibração é a mesma que a do padrão.

F.1.2.4 A necessidade de introduzir a covariância $u(x_i, x_j)$ pode ser dispensada se o conjunto original de grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$, das quais o mensurando Y depende [ver Equação (1), em 4.1], é redefinido de maneira a incluir, como grandezas de entrada independentes adicionais, aquelas grandezas Q_l que são comuns a duas ou mais das X_i originais. (Pode ser necessário executar medições adicionais para estabelecer integralmente a relação entre Q_l e as X_i afetadas). No entanto, em algumas situações pode ser mais conveniente manter as covariâncias em vez de aumentar o número das grandezas de entrada. Um processo similar pode ser realizado para as covariâncias encontradas em observações repetidas simultâneas [ver Equação (17), em 5.2.3], porém a identificação das grandezas de entrada adicionais apropriadas é frequentemente arbitrada e não física.

EXEMPLO Se, no Exemplo 1 de F.1.2.3, as expressões para I e t em termos de R_S são introduzidas na expressão de P, o resultado é

$$P = \frac{C_0 V_S^2}{R_S^2 [T_0 + \alpha\beta^2(t) R_S^2 - t_0]}$$

e a correlação entre I e t é evitada à custa da substituição das grandezas de entrada I e t pelas grandezas V_S, R_S e β. Como essas grandezas não são correlacionadas, a variância de P pode ser obtida da Equação (10) em 5.1.2.

F.2 Componentes avaliados por outros meios: avaliação do Tipo B da incerteza-padrão

F.2.1 A necessidade de avaliações do Tipo B

Se um laboratório de medição tivesse recursos e tempo ilimitados, ele poderia conduzir uma exaustiva investigação estatística de todas as causas concebíveis de incerteza, por exemplo, utilizando muitas marcas e tipos diferentes de instrumentos, diferentes métodos de medição, diferentes aplicações do método e diferentes aproximações dos seus modelos teóricos de medição. As incertezas associadas a todas essas causas poderiam, então, ser avaliadas pela análise estatística de séries de observações, e a incerteza de cada causa seria caracterizada por um desvio-padrão estatisticamente avaliado. Em outras palavras, todos os componentes da incerteza seriam obtidos através de avaliações do Tipo A. Como tal investigação não tem nenhuma praticidade econômica, muitos componentes da incerteza devem ser avaliados por quaisquer outros meios que sejam práticos.

F.2.2 Distribuições determinadas matematicamente

F.2.2.1 Resolução de uma indicação digital

Uma fonte de incerteza de um instrumento digital é a resolução de seu dispositivo indicador. Por exemplo, mesmo se as observações repetidas forem todas idênticas, a incerteza de medição atribuível à repetibilidade não seria zero, pois há uma faixa de sinais de entrada no instrumento, varrendo um intervalo conhecido, que forneceria a mesma indicação. Se a resolução do dispositivo indicador é δx, o valor do estímulo que produz uma dada indicação pode estar situado com igual probabilidade em qualquer lugar no intervalo $X - \delta x/2$ a $X + \delta x/2$. O estímulo é, então, descrito por uma distribuição de probabilidade retangular (ver 4.3.7 e 4.4.5), de largura δx, com variância $u^2 = (\delta x)^2/12$, implicando em uma incerteza-padrão de $u = 0{,}29\delta x$ para qualquer indicação.

Assim, um instrumento de pesagem com um dispositivo indicador cujo menor algarismo significativo é 1 g tem uma variância devida à resolução do dispositivo de $u^2 = (1/12)$ g^2 e uma incerteza-padrão de $u = (1/\sqrt{12})$ g = 0,29 g.

F.2.2.2 Histerese

Certos tipos de histerese podem causar um tipo similar de incerteza. A indicação de um instrumento pode diferir por um valor fixo e conhecido caso as leituras sucessivas sejam crescentes ou decrescentes. O operador prudente anota a direção das sucessivas leituras e faz a correção apropriada. Entretanto, a direção da histerese não é sempre observável: pode haver oscilações ocultas do instrumento, em torno do ponto de equilíbrio, de modo que a indicação dependa da direção pela qual este ponto de equilíbrio é finalmente alcançado. Se a faixa de leituras possíveis desta causa for δx, a variância é, novamente, $u^2 = (\delta x)^2/12$, e a incerteza-padrão devido à histerese é $u = 0{,}29\delta x$.

F.2.2.3 Aritmética de precisão-finita

O arredondamento ou truncamento de números provenientes da redução automática de dados pelo computador pode, também, ser uma fonte de incerteza. Considere, por exemplo, um computador com um comprimento de palavra de 16 bits. Se, no decorrer da computação, um número tendo esse comprimento de palavra é subtraído de outro do qual ele difira apenas no 16º bit, somente permanece um bit significativo. Tais eventos podem ocorrer na avaliação de algoritmos “mal-condicionados” e podem ser difíceis de prever. Pode-se obter uma determinação empírica da incerteza aumentando-se a grandeza de entrada mais importante para o cálculo (há frequentemente uma que é proporcional à magnitude da grandeza de saída) por pequenos incrementos até que a grandeza de saída mude; a menor mudança na grandeza de saída que pode ser obtida por tais meios pode ser tomada como uma medida da incerteza; se ela é δx, a variância é $u^2 = (\delta x)^2/12$ e $u = 0{,}29\delta x$.

NOTA Pode-se verificar a avaliação da incerteza comparando-se o resultado da computação levada a efeito na máquina com limitação do comprimento de palavra, com o resultado da mesma computação efetuada por uma máquina com um comprimento de palavra significativamente maior.

F.2.3 Valores de entrada importados

F.2.3.1 Um valor *importado* para uma grandeza de entrada é um valor que não foi estimado no decorrer de uma dada medição, mas que foi obtido em outra ocasião como resultado de uma avaliação independente. Frequentemente, tal valor importado é acompanhado de algum tipo de informação sobre a sua incerteza. Por exemplo, a incerteza pode ser dada como um desvio-padrão, um múltiplo de um desvio-padrão, ou a meia largura de um intervalo tendo um nível da confiança declarado. Alternativamente, limites superior ou inferior podem ser fornecidos, ou nenhuma informação pode ter sido fornecida sobre a incerteza. Neste último caso, aqueles que utilizam o valor devem empregar seu próprio conhecimento da magnitude provável da incerteza, considerando a natureza da grandeza, a confiabilidade da fonte, as incertezas obtidas na prática para essas grandezas, etc.

NOTA A discussão da incerteza de grandezas de entrada importadas é incluída neste item sobre a avaliação do Tipo B de incerteza-padrão por conveniência; a incerteza de tal grandeza poderia ser composta por componentes obtidos por avaliações do Tipo A ou componentes obtidos por avaliações de ambos os Tipos, A e B. Como é desnecessário distinguir entre componentes avaliados pelos dois diferentes métodos para se calcular uma incerteza-padrão combinada, é também desnecessário conhecer a composição de uma incerteza de uma grandeza importada.

F.2.3.2 Alguns laboratórios de calibração têm adotado a prática de expressar a “incerteza” na forma de limites superior e inferior que definem um intervalo tendo um nível da confiança “mínimo”, por exemplo, “pelo menos” 95 por cento. Isso pode ser visto como um exemplo da assim chamada incerteza “segura” (ver E.1.2) e esta não pode ser convertida em uma incerteza-padrão sem o conhecimento de como ela foi calculada. Se for fornecida informação suficiente, ela pode ser recalculada de acordo com as regras deste *Guia*; de outra forma, uma avaliação independente da incerteza deve ser feita por quaisquer outros meios que estejam disponíveis.

F.2.3.3 Algumas incertezas são dadas, simplesmente, como limites máximos dentro dos quais *todos* os valores da grandeza estarão contidos. É uma prática comum supor que todos os valores dentro desses limites são igualmente prováveis (uma distribuição de probabilidade retangular), mas tal distribuição não deve ser suposta se existem razões para se esperar que os valores que estejam dentro do intervalo, porém próximos aos limites, sejam menos prováveis do que aqueles que estão mais próximos do centro desses limites. Uma distribuição retangular de meia largura a tem uma variância $a^2/3$; uma distribuição normal para a qual a é a meia largura de um intervalo tendo um nível da confiança de 99,73 por cento tem uma variância de $a^2/9$. Pode ser prudente adotar um meio termo entre esses valores, por exemplo, supondo-se uma distribuição triangular, para a qual a variância é $a^2/6$ (ver 4.3.9 e 4.4.6).

F.2.4 Valores de entrada medidos

F.2.4.1 Observação única, instrumentos calibrados

Se uma estimativa de entrada foi obtida a partir de uma única observação, com um determinado instrumento que tenha sido calibrado por um padrão de pequena incerteza, a incerteza da estimativa é, principalmente, a de repetibilidade. A variância de medições repetidas pelo instrumento pode ter sido obtida em ocasião anterior, não necessariamente para o mesmo valor de leitura, mas próximo o suficiente para ser útil, podendo ser possível supor que a variância seja aplicável ao valor de entrada em questão. Se nenhuma informação estiver disponível, deve ser feita uma estimativa baseada na natureza do aparelho ou instrumento de medição, nas variâncias conhecidas de outros instrumentos de construção similar, etc.

F.2.4.2 Observação única, instrumentos verificados

Nem todos os instrumentos de medição são acompanhados de um certificado de calibração ou de uma curva de calibração. A maioria dos instrumentos, entretanto, é construída de acordo com uma norma escrita e verificada, seja pelo fabricante ou por uma autoridade independente, para estar em conformidade com esse documento. Usualmente, a norma contém requisitos metrológicos, frequentemente na forma de “erros máximos permissíveis”, com os quais se requer que o instrumento esteja conforme. O atendimento do instrumento a esses requisitos é determinado por comparação com um instrumento de referência cuja incerteza máxima permitida é, geralmente, especificada na norma. Essa incerteza é, então, um componente da incerteza do instrumento verificado.

Se nada é conhecido sobre a curva característica de erro do instrumento verificado deve-se supor que há uma probabilidade igual de que o erro tenha qualquer valor dentro dos limites permitidos, isto é, deve-se supor uma distribuição de probabilidade retangular. Entretanto, certos tipos de instrumento têm curvas características tais que os erros são, por exemplo, provavelmente sempre positivos em parte da faixa de medição e negativos em outra. Algumas vezes, tal informação pode ser deduzida pelo estudo da norma escrita.

F.2.4.3 Grandezas controladas

Medições são frequentemente feitas sob condições de referência controladas que se supõe que permaneçam constantes no decorrer de uma série de medições. Por exemplo, medições podem ser efetuadas em amostras em um banho de óleo agitado, cuja temperatura seja controlada por um termostato. A temperatura do banho pode ser medida ao mesmo tempo em que se realiza a medição em uma amostra, mas, se a temperatura do banho é cíclica, a temperatura instantânea da amostra pode não ser a temperatura indicada pelo termômetro no banho. O cálculo das flutuações da temperatura da amostra baseado na teoria de transferência de calor e de sua variância está além do escopo deste *Guia*, porém ele deve começar a partir de um ciclo conhecido ou suposto de temperatura para banho. Este ciclo pode ser observado por um termopar adequado e um registrador de temperatura, mas, na falta deles, pode-se deduzir uma aproximação do valor a partir do conhecimento da natureza dos controles.

F.2.4.4 Distribuições assimétricas de valores possíveis

Há ocasiões em que todos os valores possíveis de uma grandeza se encontram de um lado de um valor limitante único. Por exemplo, quando se mede uma altura vertical fixa h (o mensurando) de uma coluna de líquido em um manômetro, o eixo da altura do dispositivo medidor pode se desviar da vertical por um pequeno ângulo β. A distância l determinada pelo dispositivo será sempre *maior* do que h; não é possível nenhum valor menor do que h. Isto se dá porque h é igual à projeção $l\cos\beta$, implicando $l = h/\cos\beta$, e todos os valores de $\cos\beta$ são menores que um; nenhum valor maior do que um é possível. Este assim chamado "erro de cosseno" pode também ocorrer de tal maneira que a projeção $h'\cos\beta$, de um mensurando h',é igual à distância observada l, isto é, $l = h'\cos\beta$, e a distância observada é sempre *menor* do que o mensurando.

Se uma nova variável $\delta = 1 - \cos\beta$ é introduzida, as duas diferentes situações são, supondo $\beta \approx 0$, ou $\delta << 1$ como acontece geralmente na prática,

$$h = \bar{l}(1 - \delta) \qquad \text{(F.3a)}$$

$$h' = \bar{l}(1 + \delta) \qquad \text{(F.3b)}$$

Aqui $\bar{l}$, a melhor estimativa de l, é a média aritmética ou média de n observações independentes repetidas l_k, de l, com uma variância estimada $u^2(\bar{l})$ [ver as Equações (3) e (5), em 4.2]. Assim, das Equações (F.3a) e (F.3b) segue-se que, para obter uma estimativa de h ou h', necessita-se de uma estimativa do fator de correção δ, enquanto que, para se obter a incerteza-padrão combinada da estimativa de h ou h', necessita-se de $u^2(\delta)$, a variância estimada de δ. Mais especificamente, a aplicação da Equação (10) em 5.1.2 às Equações (F.3a) e (F.3b) fornece para $u_c^2(h)$ e $u_c^2(h')$ (com sinais - e +, respectivamente)

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2\, u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \text{(F.4a)}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \qquad \text{(F.4b)}$$

Para se obterem as estimativas do valor esperado de δ e da variância de δ, assume-se que o eixo do dispositivo utilizado para medir a altura da coluna de líquido no manômetro é mantido fixo no plano vertical e que a distribuição dos valores do ângulo de inclinação β, em torno de seu valor esperado zero, é uma distribuição normal, com variância σ^2. Embora β possa ter valores tanto positivos quanto negativos, $\delta = 1 - cos\beta$ é positivo para todos os valores de β. Se o desalinhamento do eixo do dispositivo não é restrito a um plano, a orientação do eixo pode variar em um ângulo sólido, uma vez que é capaz de um desalinhamento também de azimute, sendo β, porém, sempre um ângulo positivo.

No caso restrito ou unidimensional o **elemento de probabilidade** $p(\beta)\mathrm{d}\beta$ (C.2.5, nota) é proporcional a $\{exp(-\beta^2/(2\sigma^2)]\}d\beta$, no caso irrestrito ou bidimensional o elemento de probabilidade é proporcional a $\{exp(-\beta^2/(2\sigma^2)]\}sen\beta d\beta$. As funções densidade de probabilidade $p(\delta)$ são, nos dois casos, as expressões requeridas para se determinarem a esperança e a variância de δ para uso nas Equações (F.3) e (F.4). Elas podem ser prontamente obtidas a partir destes elementos de probabilidades porque o ângulo β pode ser considerado pequeno e, portanto, $\delta = 1 - cos\beta$ e $sen\beta$ podem ser expandidos até a menor ordem em β. Isso gera $\delta = \beta^2/2$, $sen\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$ e $d\beta = d\delta/\sqrt{2\delta}$. As funções densidade de probabilidade são, então:

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}}\exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5a}$$

em uma dimensão e

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2}exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5b}$$

em duas dimensões

onde

$$\int_0^\infty p(\delta)d\delta = 1$$

As Equações (F.5a) e (F.5b), que mostram que o valor mais provável da correção δ em ambos os casos é zero, fornecem, no caso unidimensional, $E(\delta) = \sigma^2/2$ e $var(\delta) = \sigma^4/2$ para a esperança e a variância de δ; e no caso bidimensional, $E(\delta) = \sigma^2$ e $var(\delta) = \sigma^4$. As Equações (F.3a), (F3.b) e (F.4b) tornam-se, então

$$h = \bar{l}[1 - (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6a}$$

$$h' = \bar{l}[1 + (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6b}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^2u^4(\beta) \tag{F.6c}$$

onde *d* é a dimensionalidade (d = 1 ou 2) e $u(\beta)$ é a incerteza-padrão do ângulo β, tomado como sendo a melhor estimativa do desvio-padrão σ de uma distribuição suposta como normal e a ser avaliada a partir de todas as informações disponíveis relativas à medição (avaliação do Tipo B). Este é um exemplo de um caso em que a estimativa do valor de um mensurando depende da *incerteza* de uma grandeza de entrada.

Embora as Equações de (F.6a) até (F.6c) sejam específicas para uma distribuição normal, a análise pode ser efetuada, supondo-se outras distribuições para β. Por exemplo, supondo-se uma distribuição retangular simétrica para β, com limites superior e inferior $+\beta_0$ e $-\beta_0$, no caso unidimensional e $+\beta_0$ e zero, no caso bidimensional, $E(\delta) = \beta_0^2/6$ e $var(\delta) = \beta_0^4/45$, em uma dimensão; $E(\delta) = \beta_0^2/4$ e $var(\delta) = \beta_0^4/48$, em duas dimensões.

NOTA Esta é uma situação em que a expansão da função $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ em uma série de Taylor de primeira ordem para obter $u_c^2(y)$, Equação (10), em 5.1.2, é inadequada por causa da não-linearidade de $f: \overline{cos\beta} \neq \cos(\bar{\beta})$ (ver Nota 2 de 5.1.2, e H.2.4). Embora a análise possa ser realizada inteiramente em termos de $\bar{\beta}$, a introdução da variável δ simplifica o problema.

Outro exemplo de uma situação em que todos os valores possíveis de uma grandeza situam-se de um só lado de um valor limitante único é a determinação por titulação da concentração de um componente em uma solução em que o ponto final é indicado pelo disparo de um sinal; a quantidade de reagente adicionada é sempre maior do que aquela necessária para disparar o sinal; nunca é menor. O excesso titulado além do ponto limite é uma variável requerida na redução de dados, e o procedimento, neste caso (e em casos similares), é supor uma distribuição de probabilidade adequada para o excesso e utilizá-la para obter o valor esperado do excesso e sua variância.

EXEMPLO Supondo-se, para o excesso z, uma distribuição retangular de limite inferior zero e limite superior C_0, o valor esperado do excesso é $C_0/2$, com a variância associada $C_0^2/12$. Se a função densidade de probabilidade do excesso for tomada como uma distribuição normal com $0 < z < \infty$, isto é, $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1}\exp[-z^2/(2\sigma^2)]$, então o valor esperado é $\sigma\sqrt{2/\pi}$, com variância $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

F.2.4.5 Incerteza quando as correções de uma curva de calibração não são aplicadas

A Nota de 6.3.1 discutiu o caso em que uma correção conhecida b, para um efeito sistemático significativo, não é aplicada ao resultado relatado de uma medição, mas, em vez disso, é levada em conta, aumentando-se a “incerteza” atribuída ao resultado. Um exemplo é a substituição de uma incerteza expandida U por $U + b$, onde U é uma incerteza expandida obtida sob a suposição de $b = 0$. Esta prática é, por vezes, seguida em situações nas quais todas as seguintes condições se aplicam: o mensurando Y é definido sobre uma faixa de valores de um parâmetro t, como no caso de uma curva de calibração para um sensor de temperatura; U e b também dependem de t; e somente um único valor de “incerteza” deve ser dado para todas as estimativas $y(t)$ do mensurando para a faixa dos valores possíveis de t. Em tais situações, o resultado da medição é muitas vezes relatado como $Y(t) = y(t) \pm [U_{\text{max}} + b_{\text{max}}]$, onde o índice “max” indica que são usados os valores máximos de U e da correção conhecida b para a faixa dos valores de t.

Embora este *Guia* recomende que sejam aplicadas correções aos resultados de medição para os efeitos sistemáticos significativos conhecidos, isto pode não ser sempre factível em tal situação, devido a um esforço financeiro inaceitável que ocorreria para calcular e aplicar uma correção individual e para calcular e utilizar uma incerteza individual para cada valor de $y(t)$.

Um enfoque comparativamente simples deste problema, consistente com os princípios deste *Guia*, é como se segue:

Calcule uma correção média *única* $\bar{b}$ a partir de

$$\bar{b} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)dt \qquad \text{(F.7a)}$$

onde t_1 e t_2 definem a faixa de interesse do parâmetro t, e considere como a melhor estimativa de $Y(t)$ o valor $y'(t) = y(t) + \bar{b}$, onde $y(t)$ é a melhor estimativa não-corrigida de $Y(t)$. A variância associada à correção média $\bar{b}$ sobre a faixa de interesse é dada por

$$u^2(\bar{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \left[b(t) - \bar{b}\right]^2 dt \qquad \text{(F.7b)}$$

sem levar em conta a incerteza da real determinação da correção $b(t)$. A variância média da correção $b(t)$ devida à sua determinação real é dada por

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)]dt \qquad \text{(F.7c)}$$

onde $u^2[b(t)]$ é a variância da correção $b(t)$. Similarmente, a variância média de $y(t)$ proveniente de todas as fontes de incerteza, à exceção da correção $b(t)$, é obtida de

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)]dt \qquad \text{(F.7d)}$$

onde $u^2[y(t)]$ é a variância de $y(t)$ devida a todas as fontes de incerteza, à exceção de $b(t)$. O valor único da incerteza-padrão a ser usado para *todas* as estimativas $y'(t) = y(t) + \bar{b}$ do mensurando $Y(t)$ é, então, a raiz quadrada positiva de

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} \; + \; u^2(\bar{b}) \qquad \text{(F.7e)}$$

Uma incerteza expandida U pode ser obtida multiplicando-se $u_c(y')$ por um fator de abrangência k adequadamente escolhido, $U = ku_c(y')$, fornecendo $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \bar{b} \pm U$. Entretanto, o fato de se ter usado a mesma correção média para todos os valores de t, em vez da correção apropriada para cada valor de t, deve ser reconhecido e declarado de forma clara no tocante ao que U representa.

F.2.5 Incerteza do método de medição

F.2.5.1 Talvez o componente de incerteza mais difícil de avaliar seja aquele associado com o método de medição, especialmente se a aplicação do método demonstrou dar resultados com menor variabilidade que os de quaisquer outros métodos conhecidos. Mas é provável que existam outros métodos, alguns deles ainda desconhecidos ou, de alguma forma, pouco práticos, que dariam de modo sistemático, resultados diferentes aparentemente de igual validade. Isto implica numa distribuição de probabilidade *a priori*, não uma distribuição da qual as amostras podem ser rapidamente extraídas e tratadas estatisticamente. Assim, muito embora a incerteza do método possa ser dominante, a única informação muitas vezes disponível para avaliar sua incerteza-padrão é o próprio conhecimento existente do mundo físico (ver também E.4.4).

NOTA A determinação do mesmo mensurando por diferentes métodos, seja no mesmo laboratório, seja em laboratórios diferentes, ou pelo mesmo método em laboratórios diferentes, pode, muitas vezes, fornecer informação valiosa acerca da incerteza atribuível a um método em particular. Em geral, a troca de padrões de medição ou de materiais de referência entre laboratórios para medições independentes é um meio útil de avaliar a confiabilidade das avaliações de incerteza e de identificar efeitos sistemáticos não reconhecidos previamente.

F.2.6 Incerteza da amostra

F.2.6.1 Muitas medições envolvem a comparação de um objeto desconhecido com um padrão conhecido, tendo características similares, de forma a calibrar o desconhecido. Exemplos incluem blocos padrão, certos termômetros, conjuntos de massas, resistores e materiais de alta pureza. Na maioria desses casos, os métodos de medição não são especialmente sensíveis, ou afetados prejudicialmente pela seleção da amostra (isto é, o desconhecido em particular sendo calibrado), pelo tratamento da amostra ou pelos efeitos das várias grandezas ambientais de influência, porque, em geral, tanto o padrão como o desconhecido respondem do mesmo modo (frequentemente previsível) a tais variáveis.

F.2.6.2 Em algumas situações práticas de medição, a amostragem e o tratamento das amostras desempenham um papel muito mais importante. Este é, muitas vezes, o caso da análise química de materiais naturais. Ao contrário dos materiais feitos pelo homem, que podem ter uma homogeneidade comprovada em um nível bem acima do requerido para a medição, os materiais naturais são frequentemente muito heterogêneos. Essa heterogeneidade conduz a dois componentes adicionais de incerteza. A avaliação do primeiro requer a determinação de quão adequadamente a amostra selecionada representa o material original sendo analisado. A avaliação do segundo requer a determinação da extensão na qual os constituintes secundários (não analisados) influenciam a medição e quão adequadamente eles são tratados pelo método de medição.

F.2.6.3 Em alguns casos, o planejamento cuidadoso da experiência pode tornar possível avaliar estatisticamente a incerteza devido à amostra (ver H.5 e H.5.3.2). Usualmente, entretanto, especialmente quando os efeitos de grandezas ambientais de influência sobre a amostra são significativos, a habilidade e conhecimento do analista, derivados de sua experiência e de todas as informações então disponíveis, são requeridos para avaliar a incerteza.

Anexo G

Graus de liberdade e níveis da confiança

G.1 Introdução

G.1.1 Este anexo trata da questão geral da obtenção de uma incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$ a partir da estimativa y do mensurando Y e de sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, que define um intervalo $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$, o qual tem uma alta probabilidade de abrangência ou nível da confiança p especificados. O anexo trata da determinação do fator de abrangência k_p que produz um intervalo em torno do resultado y da medição, do qual se espera que abranja uma grande fração especificada p da distribuição de valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos ao mensurando Y (ver Capítulo 6).

G.1.2 Em muitas situações práticas de medição o cálculo de intervalos tendo níveis da confiança especificados – de fato, a estimativa da maioria dos componentes individuais de incerteza em tais situações – é apenas uma aproximação, no melhor dos casos. Até mesmo o desvio-padrão experimental da média de um número tão grande como 30 observações repetidas de uma grandeza descrita por uma distribuição normal tem uma incerteza aproximada de 13 por cento (ver Tabela E.1 no Anexo E).

Na maioria dos casos, não faz sentido tentar distinguir entre, por exemplo, um intervalo tendo um nível da confiança de 95 por cento (uma chance em 20 de que o valor do mensurando Y esteja fora do intervalo) e intervalos de 94 ou 96 por cento (1 chance em 17 e 25, respectivamente). É particularmente difícil obter intervalos da confiança justificáveis com níveis da confiança de 99 por cento (1 chance em 100) e maiores, mesmo assumindo-se que nenhum efeito sistemático tenha sido esquecido. Isto porque geralmente se dispõe de muito pouca informação sobre as porções extremas ou “caudas” das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada.

G.1.3 Para obter o valor do fator de abrangência k_p que produz um intervalo correspondente a um nível especificado da confiança p, requer-se um conhecimento detalhado da distribuição de probabilidade caracterizada pelo resultado da medição e sua incerteza-padrão combinada. Por exemplo, para uma grandeza z descrita por uma distribuição normal com esperança μ_z e desvio-padrão σ pode ser prontamente calculado o valor de k_p que fornece um intervalo $\mu_z \pm k_p\sigma$ que compreende a fração p da distribuição, tendo, dessa forma, uma probabilidade de abrangência ou nível da confiança p. Alguns exemplos são dados na Tabela G.1.

Tabela G.1 — Valor do fator de abrangência k_p que produz um intervalo tendo nível da confiança p, para uma distribuição normal

Nível da confiança p (por cento)	**Fator de abrangência** k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NOTA Por contraste, se z é descrito por uma distribuição de probabilidade retangular com esperança μ_z e desvio-padrão $\sigma = a/\sqrt{3}$, onde a é a meia largura da distribuição, os níveis da confiança p são: 57,74 por cento para $k_p = 1$, 95 por cento para $k_p = 1{,}65$, 99 por cento para $k_p = 1{,}71$ e 100 por cento para $k_p = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. A distribuição retangular é mais estreita do que a distribuição normal no sentido de que é de extensão finita e não tem “caudas”.

G.1.4 Se as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada $X_1, X_2, ..., X_N$ das quais o mensurando Y depende são conhecidas [suas esperanças, variâncias, e momentos de ordem superior (ver C.2.13 e C.2.22) se as distribuições não são distribuições normais], e se Y é uma função linear das grandezas de entrada, $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_NX_N$, então a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida por convolução das distribuições de probabilidade individuais [10]. Os valores de k_p que fornecem os intervalos correspondentes aos níveis especificados da confiança p podem, então, ser calculados a partir da distribuição convolucionada resultante.

G.1.5 Se a relação funcional entre Y e suas grandezas de entrada é não linear e se uma expansão de primeira ordem da série de Taylor da relação não é uma aproximação aceitável (ver 5.1.2 e 5.1.5), então a distribuição de probabilidade de Y não pode ser obtida pela convolução das grandezas de entrada. Em tais casos outros métodos numéricos ou analíticos são requeridos.

G.1.6 Na prática, em razão de os parâmetros que caracterizam as distribuições de probabilidade das grandezas de entrada serem usualmente estimativas, por não ser também realístico esperar que o nível da confiança a ser associado com um determinado intervalo possa ser conhecido com um alto grau de exatidão, e devido também à complexidade envolvida na convolucão de distribuições de probabilidade, tais convoluções raramente são implementadas (quando o são) em situações em que intervalos com níveis da confiança especificados precisam ser calculados. Em vez disso são usadas aproximações que aproveitam a vantagem da aplicação do Teorema Central do Limite.

G.2 Teorema Central do Limite

G.2.1 Se $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_nX_n = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ e todos os X_i são caracterizados por distribuições normais, então a distribuição convolucionada resultante de Y também será normal. Entretanto, mesmo que as distribuições de X_i não sejam normais, a distribuição de Y pode frequentemente ser aproximada por uma distribuição normal graças ao Teorema Central do Limite. Este teorema estabelece que a distribuição de Y será *aproximadamente normal* com esperança $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ e variância $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$, onde $E(X_i)$ é a esperança de X_i e $\sigma^2(X_i)$ é a variância de X_i, se os X_i são independentes e $\sigma^2(Y)$ é muito maior do que qualquer componente individual $c_i^2\sigma^2(X_i)$ de X_i com distribuição não-normal.

G.2.2 O Teorema Central do Limite é importante porque mostra o papel muito relevante desempenhado pelas variâncias das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada, comparado ao papel desempenhado pelos momentos de ordem superior das distribuições, na determinação da forma da distribuição convolucionada resultante de Y. Ademais, isto implica que a distribuição convolucionada tende à distribuição normal quando aumenta o número de grandezas de entrada que contribuem para $\sigma^2(Y)$; que a convergência será tanto mais rápida quanto mais próximos estiverem uns dos outros os diversos valores de $c_i^2\sigma^2(X_i)$ (o que é equivalente, na prática, a dizer que as estimativas de entrada x_i contribuem com valores comparativamente próximos entre si para a incerteza da estimativa y do mensurando Y); e que quanto mais próximas as distribuições de X_i estiverem da distribuição normal tanto menos X_i serão requeridos para dar a Y uma distribuição normal.

EXEMPLO A distribuição retangular (ver 4.3.7e 4.4.5) é um exemplo extremo de uma distribuição não normal, mas mesmo a convolução de apenas *três* de tais distribuições de igual largura é aproximadamente normal. Se a meia largura de cada uma das três distribuições retangulares é a, de modo que a variância de cada uma é $a^2/3$, a variância da distribuição convolucionada é $\sigma^2 = a^2$. Os intervalos de 95 por cento e de 99 por cento da distribuição convolucionada são cobertos por $1{,}937\sigma$ e $2{,}379\sigma$, respectivamente, enquanto que os intervalos correspondentes para distribuição normal com o mesmo desvio-padrão σ são cobertos por $1{,}960\sigma$ e $2{,}576\sigma$ (ver Tabela G.1) [10].

NOTA 1 Para qualquer intervalo com um nível da confiança p maior do que cerca de 91,7 por cento, o valor de k_p para uma distribuição normal é maior do que o valor correspondente para a distribuição resultante da convolução de qualquer número e tamanho de distribuições retangulares.

NOTA 2 Do Teorema Central do Limite segue-se que a distribuição de probabilidade da média aritmética $\bar{q}$ de n observações q_k de uma variável aleatória q com esperança μ_q e desvio-padrão finito σ se aproxima de uma distribuição normal com média μ_q e desvio-padrão $\sigma/\sqrt{n}$, quando $n \to \infty$, qualquer que seja a distribuição de probabilidade de q.

G.2.3 Uma conseqüência prática do Teorema Central do Limite é que, sempre que se possa garantir que seus requisitos são aproximadamente satisfeitos, em particular, desde que a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ não seja dominada por um componente de incerteza-padrão obtido por uma avaliação do Tipo A baseada em apenas poucas observações, ou por um componente de incerteza-padrão obtido de uma avaliação do Tipo B baseada em uma distribuição assumida como retangular, uma razoável primeira aproximação para calcular uma incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$, que proporciona um intervalo com nível da confiança p, é usar, para k_p, um valor oriundo da distribuição normal. Os valores mais comumente usados para este propósito são dados na Tabela G.1.

G.3 A distribuição-*t* e os graus de liberdade

G.3.1 Para obter uma melhor aproximação do que simplesmente usar um valor k_p da distribuição normal, como em G.2.3, deve-se reconhecer que o cálculo de um intervalo com um especificado nível da confiança requer não a distribuição da variável $[Y - E(Y)]/\sigma(Y)$, mas a distribuição da variável $(y - Y)/u_c(y)$. Isto se dá porque, na prática, tudo que está geralmente disponível é y, a estimativa de Y tal como obtida de $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, onde x_i é a estimativa de X_i; e a variância combinada associada com y, $u_c^2(y)$, avaliada a partir de $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, onde $u(x_i)$ é a incerteza-padrão (desvio-padrão estimado) da estimativa x_i.

NOTA Estritamente falando, na expressão $(y - Y)/u_c(y)$, Y deve ser lido como $E(Y)$. Por simplicidade, tal distinção só tem sido feita em algumas partes deste *Guia*. Em geral, o mesmo símbolo tem sido usado para a grandeza física, a variável aleatória que representa esta grandeza, e a esperança desta variável (ver notas de 4.1.1).

G.3.2 Se z é uma variável aleatória normalmente distribuída com esperança μ_z e desvio-padrão σ, e $\bar{z}$ é a média aritmética de n observações independentes z_k de z e $s(\bar{z})$ é o desvio-padrão experimental de $\bar{z}$ [ver Equações (3) e (5) em 4.2], então a distribuição da variável $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ é a **distribuição-*t*** ou **distribuição de Student** (C.3.8), com $\nu = n - 1$ graus de liberdade.

Consequentemente, se o mensurando Y é, simplesmente, uma grandeza única normalmente distribuída X, $Y = X$; e se X é estimada pela média aritmética $\bar{X}$ de n observações repetidas e independentes X_k de X, com desvio-padrão experimental da média $s(\bar{X})$, então a melhor estimativa de Y é $y = \bar{X}$, e o desvio-padrão dessa estimativa é $u_c(y) = s(\bar{X})$. Então $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ é distribuída de acordo com a distribuição-t, com

$$Pr\left[-t_p(\nu) \leq t \leq t_p(\nu)\right] = p \tag{G.1a}$$

ou

$$Pr\left[-t_p(\nu) \leq (y - Y)/u_c(y) \leq t_p(\nu)\right] = p \tag{G.1b}$$

que pode ser reescrita como

$$Pr\left[y - t_p(\nu)u_c(y) \leq Y \leq y + t_p(\nu)u_c(y)\right] = p \tag{G.1c}$$

Nestas expressões, Pr[ ] significa “probabilidade de”, e o fator-t, $t_p(\nu)$, é o valor de t para um dado valor do parâmetro ν — o número de graus de liberdade (ver G.3.3) — tal que a fração p da distribuição-t é abrangida pelo intervalo $-t_p(\nu)$ até $+t_p(\nu)$. Assim, a incerteza expandida

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu) u_c(y) \tag{G.1d}$$

define um intervalo $y - U_p$ até $y + U_p$, convenientemente escrito como $Y = y \pm U_p$, do qual espera-se abranger uma fração p da distribuição de valores que poderiam, razoavelmente, ser atribuídos a y, e p é a probabilidade de abrangência ou nível da confiança do intervalo.

G.3.3 Para uma grandeza única estimada pela média aritmética de n observações independentes, como em G.3.2, o número de graus de liberdade ν é igual a n -1. Se n observações independentes são usadas para determinar tanto a inclinação como a interseção de uma linha reta pelo método dos mínimos quadrados, o número de graus de liberdade de suas respectivas incertezas-padrão é $\nu = n - 2$. Para um ajuste pelos mínimos quadrados de m parâmetros para n pontos de dados, o número de graus de liberdade da incerteza-padrão de cada parâmetro é $\nu = n - m$. (Ver Referência [15] para discussão adicional sobre graus de liberdade.)

G.3.4 Valores selecionados de $t_p(\nu)$ para diferentes valores de ν e vários valores de p são dados na Tabela G.2 no fim deste anexo. Quando $\nu \to \infty$ a distribuição-t se aproxima da distribuição normal e $t_p(\nu) \approx (1+2/\nu)^{1/2} k_p$, onde k_p é o fator de abrangência requerido para obter um intervalo com nível da confiança p para uma variável normalmente distribuída. Assim, o valor de $t_p(\infty)$ na Tabela G.2 para um dado p é igual ao valor de k_p na Tabela G.1 para o mesmo p.

NOTA Muitas vezes, a distribuição-t é tabulada em quantis; ou seja, valores do quantil $t_{1-\alpha}$ são dados, onde 1-α denota a probabilidade cumulativa e a relação

$$1-\alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t,\nu)\, dt$$

define o quantil, onde f é a função densidade de probabilidade de t. Assim, t_p e $t_{1-\alpha}$ são relacionados por p=1 - 2α. Por exemplo, o valor do quantil $t_{0,975}$, para o qual 1 - α = 0,975 e α = 0,025, é o mesmo que $t_p(\nu)$ para p = 0,95.

G.4 Graus de liberdade efetivos

G.4.1 Em geral, a distribuição-t não irá descrever a distribuição da variável $(y - Y)/u_c(y)$ se $u_c^2(y)$ é a soma de dois ou mais componentes de variância estimados $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (ver 5.1.3), mesmo que cada x_i seja a estimativa de uma grandeza de entrada X_i normalmente distribuída. Entretanto, a distribuição dessa variável pode ser aproximada por uma distribuição-t com um número *efetivo* de graus de liberdade ν_{eff} obtido da chamada fórmula de Welch-Satterthwaite [16], [17], [18]

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \tag{G.2a}$$

ou

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

com

$$\nu_{eff} \le \sum_{i=1}^{N} \nu_i \tag{G.2c}$$

onde $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (ver 5.1.3). A incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{\text{eff}}) u_c(y)$ fornece então um intervalo $Y = y \pm U_p$ tendo um nível da confiança aproximado p.

NOTA 1 Se o valor de ν_{eff} obtido da Equação (G.2b) não for um número inteiro, o que ocorrerá usualmente na prática, o valor correspondente de t_p pode ser encontrado a partir da Tabela G.2, por interpolação ou truncando ν_{eff} até o próximo inteiro inferior.

NOTA 2 Se uma estimativa de entrada x_i é, ela própria, obtida de duas ou mais outras estimativas, então o valor de ν_i a ser usado com $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ no denominador da Equação (G.2b) é o número de graus de liberdade efetivo calculado por uma expressão similar à própria Equação (G.2b).

NOTA 3 Dependendo das necessidades dos potenciais usuários de um resultado de medição pode ser útil, em adição a ν_{eff}, calcular e relatar também os valores ν_{effA} e ν_{effB} computados pela Equação (G.2b), tratando separadamente as incertezas-padrão obtidas por avaliações do Tipo A e do Tipo B. Se as contribuições para $u_c^2(y)$ das incertezas-padrão do Tipo A e do Tipo B são individualizadas, sendo denotadas, respectivamente, $u_{cA}^2(y)$ e $u_{cB}^2(y)$, as várias grandezas estarão assim relacionadas

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{eff}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{\nu_{effA}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{\nu_{effB}}$$

EXEMPLO Considere que $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ e que as estimativas x_1, x_2, x_3 das grandezas de entrada normalmente distribuídas X_1, X_2, X_3 são as médias aritméticas de $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ e $n_3 = 15$ observações repetidas e independentes, respectivamente, com incertezas-padrão relativas $u(x_1)/x_1 = 0{,}25$ por cento, $u(x_2)/x_2 = 0{,}57$ por cento e $u(x_3)/x_3 = 0{,}82$ por cento. Neste caso, $c_i = \partial f/\partial X_i = Y/X_i$ (a ser avaliado em x_1, x_2, x_3 - ver 5.1.3, Nota 1), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3}[u(x_i)/x_i]^2 = (1{,}03 \text{ por cento})^2$ (ver Nota 2, em 5.1.6), e a Equação (G.2b) torna-se

$$\nu_{eff} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3} \frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}}$$

Assim

$$\nu_{eff} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19{,}0$$

O valor de t_p para $p = 95$ por cento e $\nu = 19$ é, pela Tabela G.2, $t_{95}(19) = 2{,}09$; portanto a incerteza relativa expandida para este nível da confiança é $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03$ por cento$) = 2{,}2$ por cento. Pode-se, então, afirmar que $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$ [y a ser determinado por $y = bx_1x_2x_3$], ou que $0{,}978y \leq Y \leq 1{,}022y$, e que o nível da confiança a ser associado com o intervalo é aproximadamente 95 por cento.

G.4.2 Na prática, $u_c(y)$ depende das incertezas-padrão $u(x_i)$ das estimativas de entrada, tanto daquelas normalmente distribuídas, como das não normalmente distribuídas, e os $u(x_i)$ são obtidos tanto de distribuições de probabilidade baseadas em frequência como de distribuições *a priori* (isto é, tanto de avaliações do Tipo A quanto do Tipo B). Afirmação similar aplica-se à estimativa y e às estimativas x_i de entrada das quais y depende. Não obstante, a distribuição de probabilidade da função $t = (y - Y)/u_c(y)$ pode ser aproximada pela distribuição-t se ela é expandida por uma série de Taylor em torno de sua esperança. Em essência, isto é o que se consegue, na aproximação de menor ordem, pela fórmula de Welch-Satterthwaite, Equação (G.2a) ou Equação (G.2b).

Levanta-se uma questão quanto ao número de graus de liberdade a ser atribuído à incerteza-padrão obtida a partir de uma avaliação do Tipo B quando se calcula ν_{eff} pela Equação (G.2b). Como a definição apropriada de graus de liberdade reconhece que o ν, tal como aparece na distribuição-t, é uma medida da incerteza da variância $s^2(\bar{z})$, a Equação (E.7), em E.4.3, pode ser usada para definir o número de graus de liberdade ν_i,

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \qquad \text{(G.3)}$$

A grandeza entre colchetes maiores é a incerteza relativa de $u(x_i)$; ela é, para uma avaliação do Tipo B da incerteza-padrão, uma grandeza subjetiva cujo valor é obtido por julgamento científico baseado no conjunto de informações disponíveis.

EXEMPLO Baseado no conhecimento disponível do procedimento de medição usado para determinar estimativas de entrada x_i e de como sua incerteza-padrão $u(x_i)$ foi avaliada, julgou-se que a avaliação de $u(x_i)$ é confiável em cerca de 25 por cento. Isso pode ser tomado como significando que a incerteza relativa $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$ e, assim, pela Equação (G.3), $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$. Se, entretanto, o valor de $u(x_i)$ é julgado confiável em somente cerca de 50 por cento, então $\nu_i = 2$. (Ver também a Tabela E.1, no Anexo E.)

G.4.3 Na discussão em 4.3 e 4.4 da avaliação do Tipo B da incerteza-padrão a partir de uma distribuição de probabilidade *a priori*, foi implicitamente suposto que o valor de $u(x_i)$ resultante de tal avaliação é conhecido exatamente. Por exemplo, quando $u(x_i)$ é obtido por meio de uma distribuição de probabilidade retangular com meia largura suposta $a = (a_+ - a_-)/2$, como em 4.3.7 e 4.4.5, $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ é visto como uma constante sem incerteza, pois a_+ e a_-, e também a, são assim também vistas (ver porém 4.3.9, Nota 2). Isto implica, pela Equação (G.3), que $\nu_i \rightarrow \infty$ ou $1/\nu_i \rightarrow 0$, o que não causa dificuldade na avaliação da Equação G.2b. Além disso, supor que $\nu_i \rightarrow \infty$ não é necessariamente irrealístico; é uma prática usual escolher a_+ e a_- de modo tal que a probabilidade de a grandeza em questão ficar fora do intervalo a_- até a_+ seja extremamente pequena.

G.5 Outras considerações

G.5.1 Uma expressão encontrada na literatura sobre medição da incerteza e usada frequentemente para obter uma incerteza destinada a proporcionar um intervalo com um nível da confiança de 95 por cento pode ser escrita como

$$U'_{95} = \left[t_{95}^2(\nu'_{eff})s^2 + 3u^2\right]^{1/2} \tag{G.4}$$

Aqui, $t_{95}^2(\nu'_{eff})$ é obtido da distribuição-t para ν'_{eff} graus de liberdade e p = 95 por cento; ν'_{eff} é o número de graus de liberdade efetivo calculado pela fórmula de Welch-Satterthwaite [Equação (G.2b)] levando-se em conta *somente* aqueles componentes de incerteza-padrão s_i que foram avaliados estatisticamente a partir de observações repetidas na medição *em curso*; $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \delta f/\delta x_i$; e $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2\left(a_j^2/3\right)$ leva em conta *todos* os outros componentes de incerteza, onde $+a_j$ e $-a_j$ são os limites superior e inferior de X_j relativos a sua melhor estimativa x_j (isto é, $x_j - a_j \leq X_j \leq x_j + a_j$), supostos exatamente conhecidos.

NOTA Um componente baseado em observações repetidas feitas *fora* da medição em curso é tratado do mesmo modo que qualquer outro componente incluído em u^2. Então, se há um objetivo de fazer uma comparação consistente entre a Equação (G.4) e a Equação (G.5) do item seguinte, deve-se supor que tais componentes, se presentes, sejam desprezíveis.

G.5.2 Se uma incerteza expandida que fornece um intervalo com um nível da confiança de 95 por cento é avaliada de acordo com os métodos recomendados em G.3 e G.4, a expressão resultante em lugar da equação (G.4) é

$$U_{95} = t_{95}(\nu_{eff})(s^2 + u^2)^{1/2} \tag{G.5}$$

onde ν_{eff} é calculado pela Equação (G.2b) e o cálculo inclui *todos* os componentes de incerteza.

O valor de U_{95} da Equação (G.5) será, na maioria dos casos, maior que o valor U'_{95} da Equação (G.4), desde que se suponha, na avaliação da Equação (G.5), todas as variâncias do Tipo B obtidas de distribuições retangulares *a priori* com meias larguras iguais aos limites a_j usados para computar u^2 da Equação (G.4). Isso pode ser compreendido reconhecendo-se que, embora $t_{95}(\nu'_{eff})$ venha a ser, na maioria dos casos, maior do que $t_{95}(\nu_{eff})$, ambos os fatores são próximos de 2; e na Equação (G.5), u^2 é multiplicado por $t_p^2(\nu_{\text{eff}}) \approx 4$, enquanto que na Equação (G.4) ele é multiplicado por 3. Embora as duas expressões forneçam valores iguais para U'_{95} e U_{95} quando $u^2 << s^2$, U'_{95} será até 13 por cento menor do que U_{95} se $u^2 >> s^2$. Assim, em geral, a Equação (G.4) dá uma incerteza que fornece um intervalo tendo um nível da confiança *menor* do que o intervalo fornecido pela incerteza expandida calculada pela equação (G.5).

NOTA 1 Nos limites $u^2/s^2 \to \infty$ e $\nu_{eff} \to \infty$, $U'_{95} \to 1{,}732\ u$, enquanto $U_{95} \to 1{,}960\ u$. Neste caso, U'_{95} fornece um intervalo com somente 91,7 por cento de nível da confiança, enquanto que U_{95} fornece um intervalo com 95 por cento. Este caso é aproximadamente alcançado na prática quando os componentes obtidos a partir de estimativas dos limites superior e inferior são dominantes, numerosos e têm valores de $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2 / 3$ que são comparáveis em tamanho.

NOTA 2 Para uma distribuição normal, o fator de abrangência $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ fornece um intervalo com nível da confiança p = 91,673... por cento. Este valor de p é robusto no sentido que é, em comparação com qualquer outro valor, otimamente independente de pequenos desvios da normalidade das grandezas de entrada.

G.5.3 Ocasionalmente, uma grandeza de entrada X_i é distribuída assimetricamente — desvios em torno do valor esperado com um sinal são mais prováveis do que desvios com sinal contrário (ver 4.3.8). Embora isso não faça diferença na avaliação da incerteza-padrão $u(x_i)$ da estimativa x_i de X_i, e, portanto, na avaliação de $u_c(y)$, isto pode afetar o cálculo de U.

É usualmente conveniente fornecer um intervalo simétrico, $Y = y \pm U$, a não ser que o intervalo seja tal que haja um diferencial de custo entre desvios de um sinal sobre o outro. Se a assimetria de X_i causa somente uma pequena assimetria na distribuição de probabilidade, caracterizada pelo resultado de medição y e sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, a probabilidade perdida por um lado, por considerar o intervalo simétrico, é compensada pela probabilidade ganha de outro lado. A alternativa é fornecer um intervalo simétrico em probabilidade (e, dessa forma, assimétrico em relação a U): a probabilidade de que y fique abaixo do limite inferior $y - U_-$ é igual à probabilidade de que y fique acima do limite inferior $y + U_+$. Porém, de forma a considerar tais limites, são necessárias mais informações do que simplesmente as estimativas y e $u_c(y)$ [e, dessa maneira, mais informações do que simplesmente as estimativas x_i e $u(x_i)$ de cada grandeza de entrada X_i].

G.5.4 A avaliação da incerteza expandida U_p, dada aqui em termos de $u_c(y)$, de ν_{eff} e do fator $t_p(\nu_{eff})$ da distribuição-t, é somente uma aproximação e tem suas limitações. A distribuição de $(y - Y)/u_c(y)$ é dada pela distribuição-t somente se a distribuição de Y é normal, se a estimativa y e sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ são independentes e se a distribuição de $u_c^2(y)$ é uma distribuição χ^2. A introdução de ν_{eff}, Equação (G.2b), trata somente parte do problema e fornece uma distribuição aproximadamente χ^2 para $u_c^2(y)$: a outra parte do problema, originária da não normalidade da distribuição de Y, requer que, além da variância, sejam considerados também momentos de ordem mais alta.

G.6 Resumo e conclusões

G.6.1 O fator de abrangência k_p que fornece um intervalo com um dado nível da confiança p próximo a um nível especificado pode ser encontrado apenas se houver um completo conhecimento da distribuição de probabilidade de cada uma das grandezas de entrada e se estas distribuições forem combinadas para se obter a distribuição da grandeza de saída. As estimativas de entrada x_i e suas incertezas-padrão $u(x_i)$ por si mesmas não são suficientes para este propósito.

G.6.2 Em razão de raramente ser justificável, pela extensão e confiabilidade da informação disponível, processar o grande volume de cálculo requerido para combinar distribuições de probabilidade, é aceitável usar uma aproximação para a distribuição da grandeza de saída. Considerando o Teorema Central do Limite, é geralmente suficiente assumir que a distribuição da probabilidade de $(y - Y)/u_c(y)$ é a distribuição-t e tomar $k_p = t_p(\nu_{eff})$, com o fator-t baseado no número de graus de liberdade efetivo ν_{eff} de $u_c(y)$ obtido pela fórmula de Welch-Satterthwaite, Equação (G.2b).

G.6.3 Para obter ν_{eff} da Equação (G.2b) é necessário conseguir o número de graus de liberdade ν_i para cada componente de incerteza-padrão. Para um componente obtido por uma avaliação do Tipo A, ν_i é obtido a partir do número de observações independentes repetidas no qual é baseada a estimativa de entrada correspondente e do número de grandezas independentes determinado por essas observações (ver G.3.3). Para um componente obtido por uma avaliação do Tipo B, ν_i é obtido pela confiabilidade arbitrada para o valor desse componente [ver G.4.2 e a Equação (G.3)].

G.6.4 Assim, o que se segue é um sumário do método preferido para o cálculo da incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$ que fornece um intervalo $Y = y \pm U_p$ com um nível da confiança aproximado p:

1) Obtenha y e $u_c(y)$ como descrito nos Capítulos 4 e 5.

2) Calcule ν_{eff} pela fórmula de Welch-Satterthwaite, Equação (G.2b) (repetida aqui para fácil referência)

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \qquad \text{(G.2b)}$$

Se $u(x_i)$ é obtido por meio de uma avaliação do Tipo A, determine ν_i como descrito em G.3.3. Se $u(x_i)$ é obtido por meio de uma avaliação do Tipo B e pode ser tratado como exatamente conhecido, o que é frequentemente o caso na prática, $\nu_i \to \infty$; alternativamente, estime ν_i pela Equação (G.3).

3) Obtenha o fator-t, $t_p(\nu_{eff})$, para o nível da confiança p desejado a partir da tabela G.2. Se ν_{eff} não é um inteiro, faça uma interpolação, ou trunque ν_{eff} para o próximo inteiro inferior.

4) Tome $k_p = t_p(\nu_{eff})$ e calcule $U_p = k_p u_c(y)$.

G.6.5 Em certas situações, que não devem ocorrer muito frequentemente na prática, as condições requeridas pelo Teorema Central do Limite podem não ser completamente satisfeitas, e o enfoque dado em G.6.4 pode levar a um resultado inaceitável. Por exemplo, se $u_c(y)$ é dominado por um componente de incerteza avaliado por uma distribuição retangular cujos limites são supostos serem exatamente conhecidos, é possível [se $t_p(\nu_{eff}) > \sqrt{3}$] que $y + U_p$ e $y - U_p$, os limites superior e inferior do intervalo definido por U_p, possam ficar fora dos limites da distribuição de probabilidade da grandeza de saída Y. Tais casos devem ser tratados individualmente, mas são muitas vezes susceptíveis a um tratamento analítico aproximado (envolvendo, por exemplo, a convolução de uma distribuição de probabilidade normal com uma distribuição retangular [10]).

G.6.6 Para muitas medições práticas num grande número de campos, as seguintes condições prevalecem:

— a estimativa y do mensurando Y é obtida das estimativas x_i de um número significativo de grandezas de entrada X_i que são descritíveis por uma distribuição de probabilidade bem comportada, tal como as distribuições normal e retangular;

— as incertezas-padrão $u(x_i)$ dessas estimativas, que podem ser obtidas por avaliações do Tipo A ou do Tipo B, contribuem com quantidades comparáveis para a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ do resultado de medição y;

— a aproximação linear implícita na lei de propagação de incertezas é adequada (ver 5.1.2 e E.3.1);

— a incerteza de $u_c(y)$ é razoavelmente pequena devido à significativa magnitude do correspondente número de graus de liberdade efetivo ν_{eff}, digamos, maior que 10.

Sob estas circunstâncias, a distribuição de probabilidade, caracterizada pelo resultado de medição e sua incerteza-padrão combinada, pode ser suposta como normal por causa do Teorema Central do Limite, e $u_c(y)$ pode ser tomada como uma estimativa razoavelmente confiável do desvio-padrão da distribuição normal devido ao tamanho significativo de ν_{eff}. Então, com base na discussão contida neste anexo, incluindo aquela enfatizando a natureza aproximada do processo de avaliação da incerteza e a impraticabilidade de tentar distinguir intervalos tendo níveis da confiança que diferem por um ou dois por cento, pode-se proceder da seguinte maneira:

— adote $k = 2$ e assuma que $U = 2u_c(y)$ define um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 95 por cento;

ou, para aplicações mais críticas,

— adote $k = 3$ e assuma que $U = 3u_c(y)$ define um intervalo tendo um nível da confiança de aproximadamente 99 por cento.

Embora esta abordagem possa ser conveniente para muitas medições práticas, sua aplicabilidade para qualquer medição particular dependerá de o quão próximo $k = 2$ deva estar de $t_{95}(\nu_{eff})$ ou $k = 3$ deva estar de $t_{99}(\nu_{eff})$; isto é, o quão próximo o nível da confiança do intervalo definido por $U = 2u_c(y)$, ou $U = 3u_c(y)$, devam estar de 95 por cento, ou 99 por cento, respectivamente. Embora para $\nu_{eff} = 11$, $k = 2$ e $k = 3$ subestimem $t_{95}(11)$ e $t_{99}(11)$ por somente 10 e 4 por cento, respectivamente (ver Tabela G.2), isto pode não ser aceitável em alguns casos. Adicionalmente, para todos os valores de ν_{eff} algo maiores que 13, $k = 3$ produz um intervalo tendo um nível da confiança maior que 99 por cento (ver Tabela G.2, que também mostra que para $\nu_{eff} \to \infty$ os níveis da confiança dos intervalos produzidos por $k = 2$ e $k = 3$ são 95,45 e 99,73 por cento, respectivamente). Então, na prática, o tamanho de ν_{eff} e o que é requerido da incerteza expandida determinarão se essa abordagem pode ser utilizada.

Tabela G 2 — Valor de $t_p(\nu)$ da distribuição-t para ν graus de liberdade que define um intervalo $-t_p(\nu)$ a $+t_p(\nu)$ que abrange a fração p da distribuição

Graus de liberdade ν	Fração p em porcentagem					
	68,27[a)]	**90**	**95**	**95,45**[a)]	**99**	**99,73**[a)]
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.78
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.69	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

a) Para uma grandeza z descrita por uma distribuição normal, com esperança μ_z e desvio-padrão σ, o intervalo $\mu_z \pm k\sigma$ abrange p = 68,27, 95,45 e 99,73 por cento da distribuição para k = 1, 2 e 3, respectivamente.

Anexo H

Exemplos

Este anexo fornece seis exemplos, H.1 a H.6, trabalhados em detalhe suficiente de modo a ilustrar os princípios básicos apresentados neste *Guia* para avaliação e expressão da incerteza de medição. Juntamente com os exemplos incluídos no texto principal e em alguns dos outros anexos, eles devem permitir aos usuários deste *Guia* colocar estes princípios em prática em seu próprio trabalho.

Em razão de os exemplos terem fins ilustrativos, eles foram necessariamente simplificados. Além disso, já que os exemplos e os dados numéricos neles usados foram escolhidos principalmente para demonstrar os princípios deste *Guia*, nem os exemplos nem os dados deverão ser interpretados necessariamente como descrevendo medições reais. Conquanto os dados sejam usados conforme fornecidos, dígitos adicionais além dos usualmente mostrados são mantidos nos cálculos intermediários de forma a evitar erros de arredondamento. Assim, o resultado declarado de um cálculo envolvendo várias grandezas pode diferir ligeiramente do resultado que seria obtido com o uso dos valores numéricos fornecidos no texto para estas grandezas.

Em partes anteriores deste *Guia* é ressaltado que a classificação dos métodos utilizados para avaliar componentes de incerteza como sendo do Tipo A e do Tipo B é feita apenas por conveniência; essa classificação não é requerida para a determinação da incerteza-padrão combinada ou da incerteza expandida de um resultado de medição uma vez que todos os componentes da incerteza, independentemente de como tenham sido avaliados, são tratados da mesma maneira (ver 3.3.4, 5.1.2 e E.3.7). Assim, nos exemplos, o método utilizado para avaliar um determinado componente de incerteza não é especificamente identificado conforme seu tipo. Entretanto, pela discussão deverá se tornar claro se um componente é obtido por uma avaliação do Tipo A ou do Tipo B.

H.1 Calibração de bloco-padrão

Este exemplo demonstra que mesmo uma medição aparentemente simples pode envolver aspectos sutis de avaliação de incerteza.

H.1.1 O problema da medição

O comprimento de um bloco-padrão de valor nominal de 50 mm é determinado por comparação com um padrão de referência conhecido de mesmo comprimento nominal. A saída direta da comparação dos dois blocos é a diferença d entre seus comprimentos:

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_S(1 + \alpha_S\theta_S) \qquad \text{(H.1)}$$

onde

- l é o mensurando, ou seja, o comprimento a 20 ºC do bloco-padrão sendo calibrado;
- l_S é o comprimento do padrão a 20 ºC, como dado no seu certificado de calibração;
- α e α_S são os coeficientes de expansão térmica, respectivamente, do bloco-padrão em calibração e do padrão;
- θ e θ_S são os desvios em temperatura com relação à temperatura de referência de 20 ºC, respectivamente, do bloco em calibração e do padrão.

H.1.2 Modelo matemático

Pela Equação (H.1), o mensurando é dado por

$$l = \frac{l_S(1+\alpha_S\theta_S)+d}{(1+\alpha\theta)} = l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + \cdots \quad \text{(H.2)}$$

Se a diferença de temperatura entre o bloco em calibração e o padrão é escrita como $\delta\theta = \theta - \theta_S$, e a diferença entre os seus coeficientes de expansão térmica como $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, a Equação (H.2) se torna

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) = l_S + d - l_S[\delta\alpha.\theta + \alpha_S.\delta\theta] \quad \text{(H.3)}$$

As diferenças $\delta\theta$ e $\delta\alpha$, mas não suas incertezas, são estimadas como zero; e $\delta\alpha$, α_S, $\delta\theta$ e θ são supostos não-correlacionados. (Se o mensurando fosse expresso em termos das variáveis θ, θ_S, α e α_S, seria necessário incluir a correlação entre θ e θ_S, e entre α e α_S.)

Segue-se assim da Equação (H.3) que a estimativa do valor do mensurando l pode ser obtida de uma expressão simples $l_S + \bar{d}$, onde l_S é o comprimento do padrão a 20 ºC como declarado em seu certificado de calibração, e d é estimado por $\bar{d}$, a média aritmética de $n = 5$ observações repetidas independentes. A incerteza-padrão combinada $u_c(l)$ de l é obtida aplicando-se a Equação (10), em 5.1.2, à Equação (H.3), como discutido abaixo.

NOTA Neste e em outros exemplos, para simplicidade de notação, o mesmo símbolo é usado para uma grandeza e sua estimativa.

H.1.3 Variâncias contribuintes

Os aspectos pertinentes deste exemplo, tal como discutidos aqui e nos itens seguintes, estão resumidos na Tabela H.1.

Uma vez que se supõe que $\delta\alpha = 0$ e $\delta\theta = 0$, a aplicação da Equação (10), em 5.1.2, à Equação (H.3) resulta em

$$u_c^2(l) = c_S^2u^2(l_S) + c_d^2u^2(d) + c_{\alpha_S}^2u^2(\alpha_S) + c_\theta^2u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2u^2(\delta\theta) \quad \text{(H.4)}$$

com

$$c_S = \partial f/\partial l_S = 1 - (\delta\alpha.\theta + \alpha_S.\delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f/\partial d = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \partial f/\partial \alpha_S = -l_S\delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \partial f/\partial \theta = -l_S\delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f/\partial \delta\alpha = -l_S\theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f/\partial \delta\theta = -l_S\alpha_S$$

e então

$$u_c^2(l) = u^2(l_S) + u^2(d) + l_S^2\theta^2u^2(\delta\alpha) + l_S^2\alpha_S^2u^2(\delta\theta) \quad \text{(H.5)}$$

H.1.3.1 Incerteza de calibração do padrão de referência, $u(l_S)$

O certificado de calibração fornece, como incerteza expandida do padrão, $U = 0{,}075\ \mu m$, e declara que ela foi obtida usando um fator de abrangência de $k = 3$. A incerteza-padrão é então

$$u(l_S) = (0{,}075\ \mu m)\ /\ 3 = 25\ nm$$

H.1.3.2 Incerteza na diferença entre as medidas dos comprimentos, $u(d)$

O desvio-padrão experimental agrupado que caracteriza a comparação de l e l_S foi determinado a partir da variabilidade de 25 observações repetidas e independentes da diferença nos comprimentos dos dois blocos-padrão, tendo sido encontrado o valor de $13\ nm$. Na comparação deste exemplo foram realizadas cinco observações repetidas. A incerteza-padrão associada com a média aritmética dessas leituras é, então (ver 4.2.4)

$$u(\bar{d}\,) = s(\bar{d}\,) = (13\ nm)\ /\ \sqrt{5} = 5{,}8\ nm$$

De acordo com o certificado de calibração do comparador usado para a comparação de l e l_S, sua incerteza "proveniente de erros aleatórios" é $\pm\ 0{,}01\ \mu m$ para um nível da confiança de 95 por cento e é baseada em 6 medições replicadas; assim, a incerteza-padrão, usando $t_{95}(5) = 2{,}57$ como fator-t para $\nu = 6 - 1 = 5$ graus de liberdade (ver Tabela G.2 no Anexo G), é

$$u(d_1\,) = (0{,}01\ \mu m)\ /\ 2{,}57 = 3{,}9\ nm$$

A incerteza do comparador "devida a erros sistemáticos" é dada no certificado como sendo de $0{,}02\ \mu m$ para um "nível de três sigmas". A incerteza-padrão oriunda desta fonte pode, portanto, ser tomada como

$$u(d_2\,) = (0{,}02\ \mu m)\ /\ 3 = 6{,}7\ nm$$

A contribuição total é obtida pela soma das variâncias estimadas:

$$u^2(d\,) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1\,) + u^2(d_2\,) = 93\ nm^2$$

ou

$$u(d) = 9{,}7\ nm$$

H.1.3.3 Incerteza do coeficiente de expansão térmica, $u(\alpha_S)$

O coeficiente de expansão térmica do bloco de referência é dado como $\alpha_S = 11{,}5\ x\ 10^{-6}\ ℃^{-1}$, com uma incerteza representada por uma distribuição retangular com limites $\pm\ 2\ x\ 10^{-6}\ ℃^{-1}$. A incerteza-padrão é, então [ver Equação (7) em 4.3.7]

$$u(\alpha_S\,) = (\ 2\ x\ 10^{-6}\ ℃^{-1})\ /\sqrt{3} = 1{,}2\ \times\ 10^{-6}\ ℃^{-1}$$

Visto que $c_{\alpha_S} = \partial f / \partial\alpha_S = -\ l_S\,\delta\theta = 0$, como indicado em H.1.3, esta incerteza em nada contribui para a incerteza de l em primeira ordem. Ela tem, entretanto, uma contribuição de segunda ordem, que é discutida em H.1.7.

Tabela H.1 — Sumário de componentes de incerteza-padrão

Componentes de incerteza-padrão $u(x_i)$	**Fonte de incerteza**	**Valor da incerteza-padrão** $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (nm)	**Número de graus de liberdade**
$u = (l_\mathrm{S})$	Calibração do bloco de referência	25 nm	1	25	18
$u = (d)$	Diferença medida entre os blocos-padrão	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u = (\bar{d})$	Observações repetidas	5,8 nm			24
$u = (d_1)$	Efeitos aleatórios do comparador	3,9 nm			5
$u = (d_2)$	Efeitos sistemáticos do comparador	6,7 nm			8
$u = (\alpha_\mathrm{S})$	Coeficiente de expansão térmica do bloco-padrão	$1{,}2\mathrm{x}10^{-6}\ {}^\mathrm{o}\mathrm{C}^{-1}$	0	0	
$u = (\theta)$	Temperatura da bancada de teste	0,41 °C	0	0	
$u = (\bar{\theta})$	temperatura média da bancada	0,2 °C			
$u = (\Delta)$	variação cíclica da temperatura ambiente	0,35 °C			
$u = (\delta\alpha)$	Diferença nos coeficientes de expansão dos blocos-padrão	$0{,}58\mathrm{x}10^{-6}\ {}^\mathrm{o}\mathrm{C}^{-1}$	$-l_\mathrm{S}\theta$	2,9	50
$u = (\delta\theta)$	Diferença de temperatura entre os blocos-padrão	0,029 °C	$-l_\mathrm{S}\alpha_\mathrm{S}$	16,6	2
					$u_c^2(l) = \sum u_i^2\,(l) = 1002\ nm^2$ $u_c(l) = 32\ nm$ $v_{eff}(l) = 16$

H.1.3.4 Incerteza do desvio da temperatura do bloco em calibração, $u(\theta)$

A temperatura da bancada de teste é relatada como $(19{,}9 \pm 0{,}5)\,℃$; a temperatura no momento das observações individuais não foi registrada. A variação máxima declarada, $\Delta = 0{,}5\ ℃$ é tida como representando a amplitude de uma variação aproximadamente cíclica da temperatura sob um sistema termostático, e não a incerteza da temperatura média. O valor médio do desvio da temperatura

$$\bar{\theta} = 19{,}9\ ℃ - 20\ ℃ = -0{,}1\ ℃$$

é relatado como tendo uma incerteza-padrão própria devido à incerteza na temperatura média da bancada de teste de

$$u(\bar{\theta}) = 0{,}2\ ℃$$

enquanto que a variação cíclica no tempo produz uma distribuição de temperaturas em forma de U (arcsen), resultando em uma incerteza-padrão de

$$u(\Delta) = (0{,}5\ ℃)/\sqrt{2} = 0{,}35\ ℃$$

O desvio de temperatura θ pode ser tomado como igual a $\bar{\theta}$, e a incerteza-padrão de θ é obtida de

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ ℃^2$$

que fornece

$$u(\theta) = 0{,}41\ ℃$$

Uma vez que $c_\theta = \partial f / \partial\theta = -\,l_S\,\delta\alpha = 0$ como indicado em H.1.3, esta incerteza também em nada contribui para a incerteza de l em primeira ordem; mas ela tem uma contribuição de segunda ordem, que é discutida em H.1.7.

H.1.3.5 Incerteza na diferença entre os coeficientes de expansão térmica, $u(\delta\alpha)$

Os limites estimados na variabilidade de $\delta\alpha$ são ±1 x 10^{-6} $^{o}C^{-1}$, com igual probabilidade de $\delta\alpha$ ter qualquer valor dentro destes limites. A incerteza-padrão é

$$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6}\ ℃^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58x10^{-6}\ ℃^{-1}$$

H.1.3.6 Incerteza na diferença entre as temperaturas dos blocos, $u(\delta\theta)$

Espera-se que o padrão de referência e o bloco em calibração estejam na mesma temperatura, mas a diferença de temperatura pode estar com igual probabilidade em qualquer lugar no intervalo estimado de $-0{,}05$ ℃ a $+0{,}05$ ℃. A incerteza-padrão é

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ ℃)/\sqrt{3} = 0{,}029\ ℃$$

H.1.4 Incerteza-padrão combinada

A incerteza-padrão combinada $u_c(l)$ é calculada pela Equação (H.5). Os termos individuais são coletados e substituídos nesta expressão para obter

$$u_c^2(l) = (25\ nm)^2 + (9{,}7\ nm)^2 + (0{,}05\ m)^2(-0{,}1\ ℃)^2(0{,}58 \times 10^{-6}\ ℃^{-1})^2 + \tag{H.6a}$$

$$+(0{,}05\ m)^2(11{,}5 \times 10^{-6}\ ℃^{-1})^2(0{,}029\ ℃)^2$$

$$= (25\ nm)^2 + (9{,}7\ nm)^2 + (2{,}9\ nm)^2 + (16{,}6\ nm)^2 = 1002\ nm^2 \tag{H.6b}$$

ou

$$u_c(l) = 32\ nm \tag{H.6c}$$

O componente dominante de incerteza é, obviamente, aquele do padrão de referência, $u(l_S)$ = 25 nm.

H.1.5 Resultado final

O certificado de calibração para o bloco-padrão de referência fornece $l_S = 50{,}000\ 623\ mm$ como seu comprimento a 20 ℃. A média aritmética $\bar{d}$ das cinco observações repetidas da diferença nos comprimentos entre o bloco-padrão desconhecido e o padrão de referência é $215\ nm$. Assim, visto que $l = l_S + \bar{d}$ (ver H.1.2), o comprimento l do bloco-padrão em calibração, a 20 ℃, é $50{,}000\ 838\ mm$. De acordo com 7.2.2, o resultado final da medição pode ser declarado como:

> l = 50,000 838 mm, com uma incerteza-padrão combinada u_c = 32 nm. A incerteza-padrão combinada relativa correspondente é $u_c\,/\,l$ = 6,4 x 10^{-7}.

H.1.6 Incerteza expandida

Suponha que seja requerida a obtenção de uma incerteza expandida $U_{99} = k_{99}\,u_c(l)$ que forneça um intervalo com um nível da confiança de aproximadamente 99 por cento. O procedimento a ser utilizado está resumido em G.6.4, e os números de graus de liberdade requeridos estão indicados na Tabela H.1. Seus valores foram obtidos como se segue:

1) *Incerteza de calibração do padrão*, $u(l_s)$ [H.1.3.1]. O certificado de calibração declara que o número efetivo de graus de liberdade da incerteza-padrão combinada da qual foi obtida a incerteza expandida citada é $\nu_{eff}\,(l_S) = 18$.

2) *Incerteza na diferença medida entre os comprimentos*, $u(d)$ [H.1.3.2]. Embora $\bar{d}$ tenha sido obtida de cinco observações repetidas, em razão de $u(\bar{d})$ ter sido obtida de um desvio-padrão experimental agrupado baseado em 25 observações, o número efetivo de graus de liberdade de $u(\bar{d})$ é $\nu(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$ (ver H.3.6 - nota). O número de graus de liberdade efetivo de $u(d_1)$, incerteza devida aos efeitos aleatórios no comparador, é $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$, por ter sido d_1 obtida de seis medições repetidas. A incerteza de $\pm\,0{,}02\ \mu m$ devida a efeitos sistemáticos no comparador pode ser suposta como sendo confiável a 25 por cento e, assim, da Equação (G.3), em G.4.2, o número de graus de liberdade efetivo é $\nu(d_2) = 8$ (ver o exemplo de G.4.2). O número efetivo de graus de liberdade de $u(d)$, $\nu_{eff}(d)$, é então obtido da Equação (G.2b) em G.4.1:

$$\nu_{eff}(d) = \frac{\left[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)\right]^2}{\dfrac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})} + \dfrac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)} + \dfrac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}} = \frac{(9{,}7\ nm)^4}{\dfrac{(5{,}8\ nm)^4}{24} + \dfrac{(3{,}9\ nm)^4}{5} + \dfrac{(6{,}7\ nm)^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Incerteza na* diferença *entre os coeficientes de expansão térmica*, $u(\delta\alpha)$ [H.1.3.5]. Os limites estimados de $\pm\,1\,x\,10^{-6}\,℃^{-1}$ sobre a variabilidade de $\delta\alpha$ são julgados confiáveis a 10 por cento. Isso dá, pela Equação (G.3) em G.4.2, $\nu\,(\delta\alpha) = 50$.

4) *Incerteza na diferença entre as temperaturas dos blocos,* $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. O intervalo estimado de $-\,0{,}05\ ℃$ a $+\,0{,}05\ ℃$ para a diferença de temperatura $\delta\theta$ é tido como confiável somente a 50 por cento, o que, pela Equação (G.3) em G.4.2, fornece $\nu(\delta\theta) = 2$.

O cálculo de $\nu_{eff}(l)$ pela Equação (G.2b) em G.4.1 é efetuado exatamente da mesma maneira que o cálculo de $\nu_{eff}(d)$ em 2) acima. Assim, das Equações (H.6b) e (H.6c) e dos valores de ν dados em 1) até 4),

$$\nu_{eff}(l) = \frac{(32\ nm)^4}{\dfrac{(25\ nm)^4}{18} + \dfrac{(9{,}7\ nm)^4}{25{,}6} + \dfrac{(2{,}9\ nm)^4}{50} + \dfrac{(16{,}6\ nm)^4}{2}} = 16{,}7$$

Para obter a incerteza expandida requerida, este valor é primeiramente truncado para o próximo inteiro inferior, $\nu_{eff}(l) = 16$. Segue-se então da Tabela G.2 no Anexo G que $t_{99}(16) = 2{,}92$ e, portanto, $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2{,}92\,x\,(32\ nm) = 93\ nm$. De acordo com 7.2.4 o resultado final da medição pode ser declarado como:

> $l = (50{,}000\,838 \pm 0{,}000\,093)\ mm$, onde o número precedido do símbolo ± é o valor numérico de uma incerteza expandida $U = ku_c$, com U determinado a partir de uma incerteza-padrão combinada u_c = 32nm e um fator de abrangência k = 2,92, baseado na distribuição-t para ν graus de liberdade, e define um intervalo que se estima ter um nível da confiança de 99 por cento. A incerteza expandida relativa correspondente é $U/l = 1{,}9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Termos de segunda ordem

A nota de 5.1.2 assinala que a Equação (10), que é usada neste exemplo para obter a incerteza-padrão combinada $u_c(l)$, deve ser aumentada quando a não-linearidade da função $Y=f(X_1, X_2, ..., X_N)$ é tão significativa que os termos de maior ordem na expansão pela série de Taylor não podem ser desprezados. Tal é o caso neste exemplo e, portanto, a avaliação de $u_c(l)$, como apresentada até este ponto, não está completa. A aplicação da Equação (H.3) da expressão dada na nota de 5.1.2 resulta, de fato, em dois termos de segunda ordem distintos, não-desprezíveis, a serem adicionados à Equação (H.5). Estes termos, que provêm do termo quadrático na expressão da nota, são

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

mas somente o primeiro destes termos contribui significativamente para $u_c(l)$:

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0{,}05\ m)(0{,}58 \times 10^{-6}\ ℃^{-1})(0{,}41\ ℃) = 11{,}7\ \text{nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0{,}05\ m)(1{,}2 \times 10^{-6}\ ℃^{-1})(0{,}029\ ℃) = 1{,}7\ \text{nm}$$

Os termos de segunda ordem aumentam $u_c(l)$ de 32 nm para 34 nm.

H.2 Medição simultânea de resistência e reatância

Este exemplo trata o caso de grandezas de saída ou mensurandos múltiplos determinados simultaneamente na mesma medição, inclusive a correlação de suas estimativas. Consideram-se somente as variações aleatórias das observações; em um caso prático, as incertezas de correções para efeitos sistemáticos também contribuiriam para a incerteza dos resultados da medição. Os dados são analisados de dois modos diferentes, sendo que ambos fornecem essencialmente os mesmos valores numéricos.

H.2.1 O problema de medição

A resistência R e a reatância X de um elemento de circuito são determinadas medindo-se a amplitude V de uma diferença de potencial alternada senoidal entre seus terminais, a amplitude I da corrente alternada que passa por ele e o ângulo de diferença de fase ϕ entre a diferença de potencial alternada e a corrente alternada. Assim, as três grandezas de entrada são V, I e ϕ, e as três grandezas de saída — os mensurados — são os três componentes da impedância R, X , e Z. Uma vez que $Z^2 = R^2 + X^2$, há somente duas grandezas de saída independentes.

H.2.2 Modelo matemático e dados

Os mensurandos são relacionados às grandezas de entrada pela lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{I} cos\phi; \qquad X = \frac{V}{I} sen\phi; \qquad Z = \frac{V}{I} \tag{H.7}$$

Considere que cinco conjuntos independentes de observações simultâneas das três grandezas de entrada V, I e ϕ são obtidos sob condições similares (ver B.2.15), resultando nos dados apresentados na Tabela H.2. As médias aritméticas das observações e os desvios-padrão experimentais destas médias, calculados pelas Equações (3) e (5) em 4.2, são também dados. As médias são tomadas como sendo as melhores estimativas dos valores esperados das grandezas de entrada, e os desvios-padrão experimentais são as incertezas-padrão destas médias.

Como as médias $\overline{V}$, $\bar{I}$ e $\overline{\phi}$ são obtidas a partir de observações simultâneas, elas são correlacionadas e as correlações devem ser levadas em conta na avaliação das incertezas-padrão dos mensurandos R, X e Z. Os coeficientes de correlação requeridos são prontamente obtidos pela Equação (14) em 5.2.2 usando valores de $s(\bar{V},\bar{I})$, $s(\bar{V},\bar{\phi})$ e $s(\bar{I},\bar{\phi})$ calculados pela Equação (17) em 5.2.3. Os resultados estão incluídos na Tabela H.2, onde deve ser lembrado que $r(x_i,x_j) = r(x_j,x_i)\ e\ r(x_i,x_i) = 1$.

Tabela H.2 — Valores das grandezas de entrada *V, I* e ϕ obtidos de cinco conjuntos de observações simultâneas

Número do conjunto k	**Grandezas de entrada**		
	V (V)	I (mA)	$\emptyset$ (rad)
1	5,007	19,663	1,045 6
2	4,994	19,639	1,043 8
3	5,005	19,640	1,046 8
4	4,990	19,685	1,042 8
5	4,999	19,678	1,043 3
Média aritmética	$\bar{V} = 4{,}999\ 0$	$\bar{I} = 19{,}661\ 0$	$\bar{\emptyset} = 1{,}044\ 46$
Desvio-padrão experimental da média	$s(\bar{V}) = 0{,}003\ 2$	$s(\bar{I}) = 0{,}009\ 5$	$s(\bar{\emptyset}) = 0{,}000\ 75$
Coeficientes de correlação			
$r(\bar{V},\bar{I}) = -0{,}36$ $r(\bar{V},\bar{\emptyset}) = 0{,}86$ $r(\bar{I},\bar{\emptyset}) = -0{,}65$			

H.2.3 Resultados: enfoque 1

O enfoque 1 está resumido na Tabela H.3.

Os valores dos três mensurandos R, X e Z são obtidos das relações dadas na Equação (H.7), usando os valores médios $\bar{V}$, $\bar{I}$ e $\bar{\phi}$ da Tabela H.2, para V, I e ϕ. As incertezas-padrão de R, X e Z são obtidas da Equação (16) em 5.2.2, uma vez que, como mencionado acima, as grandezas de entrada $\bar{V}$, $\bar{I}$ e $\bar{\phi}$ são correlacionadas. Como exemplo, considere $Z = \bar{V}/\bar{I}$. Identificando $\bar{V}$ com x_1, $\bar{I}$ com x_2 e f com $Z = \bar{V}/\bar{I}$, a equação (16) em 5.2.2 fornece para a incerteza-padrão combinada de Z

$$u_c^2(Z) = \left[\frac{1}{\bar{I}}\right] u^2(\bar{V}) + \left[\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right]^2 u^2(\bar{I}) + 2\left[\frac{1}{\bar{I}}\right]\left[-\frac{\bar{V}}{\bar{I}^2}\right] u(\bar{V})u(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8a}$$

$$= Z^2\left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right]^2 - 2Z^2\left[\frac{u(\bar{V})}{\bar{V}}\right]\left[\frac{u(\bar{I})}{\bar{I}}\right] r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8b}$$

ou

$$u_{c,r}^2(\bar{Z}) = u_r^2(\bar{V}) + u_r^2(\bar{I}) - 2u_r(\bar{V})u_r(\bar{I})r(\bar{V},\bar{I}) \tag{H.8c}$$

onde $u(\bar{V}) = s(\bar{V})$ e $u(\bar{I}) = s(\bar{I})$, e o subscrito “r” na última expressão indica que u é uma incerteza relativa. Substituindo os valores apropriados da Tabela H.2 na Equação (H.8a) tem-se, então, $u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$.

Em razão de os três mensurandos, ou grandezas de saída, dependerem das mesmas grandezas de entrada, eles são também correlacionados. Os elementos da matriz de covariância que descreve esta correlação podem ser escritos, em geral, como

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{H.9}$$

onde $y_l = f_l(x_1, x_2, ..., x_N)$ e $y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_N)$. A Equação (H.9) é a generalização da Equação (F.2), em F.1.2.3, quando os q_l naquela expressão são correlacionados. Os coeficientes de correlação estimados das grandezas de saída são dados por $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)/u(y_l)u(y_m)$, como indicado na Equação (14) em 5.2.2. Deve-se reconhecer que os elementos diagonais da matriz de covariância, $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$, são as variâncias estimadas das grandezas de saída y_l (ver 5.2.2, Nota 2) e que, para $m = l$, a Equação (H.9) é idêntica à Equação (16) em 5.2.2.

Para aplicar a Equação (H.9) neste exemplo, são feitas as seguintes identificações:

$$y_1 = R \qquad x_1 = \bar{V} \qquad u(x_i) = s(x_i)$$

$$y_2 = X \qquad x_2 = \bar{I} \qquad N = 3$$

$$y_3 = Z \qquad x_3 = \bar{\phi}$$

Os resultados dos cálculos de R, X, Z e de suas variâncias estimadas e coeficientes de correlação são dados na Tabela H.3.

Tabela H.3 — Valores calculados das grandezas de saída R, X e Z: enfoque 1

Índice do mensurando l	Relação entre a estimativa do mensurando y_l e as grandezas de entrada x_i	Valor da estimativa y_l, que é o resultado da medição	Incerteza-padrão combinada $u_c(y_l)$ do resultado da medição
1	$y_1 = R = (\bar{V}/\bar{I})cos\bar{\phi}$	$y_1 = R = 127{,}732\ \Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\bar{V}/\bar{I})sen\bar{\phi}$	$y_2 = X = 219{,}847\ \Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \bar{V}/\bar{I}$	$y_3 = Z = 254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}09 \times 10^{-2}$
Coeficientes de *correlação* $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0{,}588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}993$			

H.2.4 Resultados: enfoque 2

O enfoque 2 está resumido na Tabela H.4.

Uma vez que os dados foram obtidos como cinco conjuntos de observações das três grandezas de entrada V, I e ϕ, é possível computar um valor para R, X e Z a partir de *cada conjunto* de dados de entrada, e então tomar a média aritmética dos cinco valores individuais para obter as melhores estimativas de R, X e Z. O desvio-padrão experimental de cada média (que é a sua incerteza-padrão combinada) é então calculado da maneira usual a partir dos cinco valores individuais [Equação (5) em 4.2.3]; e as covariâncias estimadas das três médias são calculadas aplicando-se diretamente a Equação (17), em 5.2.3, aos cinco valores individuais a partir dos quais cada média é obtida. Não existem diferenças nos valores de saída, incertezas-padrão e covariâncias estimadas fornecidas pelos dois enfoques, exceto aquelas devidas a efeitos de segunda ordem associados com a substituição de termos tais como $\bar{V}/\bar{I}$ e $cos\bar{\phi}$ por $\overline{V/I}$ e $\overline{cos\phi}$.

Para demonstrar este enfoque, a Tabela H.4 fornece os valores de R, X e Z calculados para cada um dos cinco conjuntos de observações. As médias aritméticas, incertezas-padrão e coeficientes de correlação estimados são então computados diretamente destes valores individuais. Os resultados numéricos obtidos dessa maneira diferem dos resultados fornecidos na Tabela H.3 por valores desprezíveis.

Tabela H.4 — Valores calculados das grandezas de saída *R*, *X* e *Z*: enfoque 2

Número do conjunto k	**Valores individuais dos mensurandos**		
	$R = (V/I)cos\emptyset$ (Ω)	$X = (V/I)sen\emptyset$ (Ω)	$Z = V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Média aritmética	$y_1 = \bar{R} = 127{,}732$	$y_2 = \bar{X} = 219{,}847$	$y_3 = \bar{Z} = 254{,}260$
Desvio-padrão experimental da média	$s(\bar{R}) = 0{,}071$	$s(\bar{X}) = 0{,}295$	$s(\bar{Z}) = 0{,}236$
Coeficientes de *correlação* $r(y_l\,, y_m)$			
$r(y_1\,,y_2) = r(\overline{\mathrm{R}}\,,\overline{\mathrm{X}}) = -0{,}588$ $r(y_1\,,y_3) = r(\overline{\mathrm{R}}\,,\overline{\mathrm{Z}}) = -0{,}485$ $r(y_2\,,y_3) = r(\overline{\mathrm{X}}\,,\overline{\mathrm{Z}}) = 0{,}993$			

Na terminologia da Nota de 4.1.4, o enfoque 2 é um exemplo de obtenção da estimativa y a partir de $\overline{\mathrm{Y}} = (\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{Y_k})/\mathrm{n}$, enquanto que o enfoque 1 é um exemplo de obtenção de y a partir de $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$. Como ressaltado naquela nota, em geral os dois enfoques fornecerão resultados *idênticos* se f for uma função linear de suas grandezas de entrada (desde que os coeficientes de correlação observados experimentalmente sejam levados em consideração quando se implementa o enfoque 1). Se f não for uma função linear, então os resultados do enfoque 1 diferirão daqueles do enfoque 2, dependendo do grau de não-linearidade e das variâncias e covariâncias estimadas de X_{i}. Isso pode ser visto na expressão

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}_i, \partial \bar{X}_j} u(\bar{X}_i, \bar{X}_j) + \cdots \tag{H.10}$$

onde o segundo termo no lado direito da igualdade é o termo de segunda ordem da expansão da série de Taylor de f em termos de $\bar{X}_i$ (ver também 5.1.2, nota). No presente caso, o enfoque 2 é preferível porque evita a aproximação $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ e reflete melhor o procedimento de medição utilizado — os dados foram, na realidade, coletados em conjuntos.

Por outro lado, o enfoque 2 seria inadequado se os dados da tabela H.2 representassem $n_1 = 5$ observações da diferença de potencial V, seguidas por $n_2 = 5$ observações da corrente I, e então seguidas por $n_3 = 5$ observações da fase ϕ, e seria impossível (de ser implementado) se $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (É, na realidade, um mau procedimento de medição executar as medições dessa maneira, uma vez que a diferença de potencial e a corrente estabelecidas em uma impedância específica são diretamente relacionadas).

Se os dados da Tabela H.2 forem reinterpretados dessa maneira, de modo que o enfoque 2 seja inadequado, e se as correlações entre as grandezas V, I e ϕ forem supostas como ausentes, então os coeficientes de correlação observados não terão nenhum significado e deverão ser tomados como sendo zero. Se isto é feito na Tabela H.2, a Equação (H.9) reduz-se ao equivalente da Equação (F.2) em F.1.2.3, isto é,

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}u^2(x_i) \tag{H.11}$$

e sua aplicação aos dados da Tabela H.2 leva às alterações na Tabela H.3, mostradas na Tabela H.5.

Tabela H.5 — Alterações na tabela H.3 sob a hipótese de que os coeficientes de correlação da tabela H.2 são nulos

Incerteza-padrão combinada $u_c(y_l)$ do resultado de medição
$u_c(R) = 0{,}195\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15\ \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09\ \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0{,}204\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08\ \times 10^{-2}$
Coeficientes de *correlação* $r(y_l\,, y_m)$
$r(y_1\,, y_2) = r(\mathrm{R}\,, \mathrm{X}) = \ 0{,}056$ $r(y_1\,, y_3) = r(\mathrm{R}\,, \mathrm{Z}) = \ 0{,}527$ $r(y_2\,, y_3) = r(\mathrm{X}\,, \mathrm{Z}) = \ 0{,}878$

H.3 Calibração de um termômetro

Este exemplo ilustra o uso do método dos mínimos quadrados para obter uma curva de calibração linear e como os parâmetros do ajuste, o intercepto e a inclinação, assim como suas variâncias e covariância estimadas, são usados para obter, a partir da curva, o valor da incerteza-padrão de uma correção prevista.

H.3.1 O problema da medição

Um termômetro é calibrado comparando-se $n = 11$ leituras t_k de temperatura do termômetro, cada uma tendo uma incerteza desprezível, com as correspondentes temperaturas de referência conhecidas $t_{R,k}$ na faixa de temperatura de 21 ºC a 27 ºC para obter as correções $b_k = \ t_{R,k} - \ t_k$ para as leituras. As correções *medidas* b_k e as temperaturas *medidas* t_k são as grandezas de entrada da avaliação. Uma curva de calibração linear

$$b\ (t) = \ y_1 + \ y_2\ (t - \ t_0) \tag{H.12}$$

é ajustada pelo método dos mínimos quadrados para as correções e temperaturas medidas. Os parâmetros y_1 e y_2, que são, respectivamente, o intercepto e a inclinação da curva de calibração, são os dois mensurandos ou grandezas de saída a serem determinadas. A temperatura t_0 é uma temperatura exata de referência convenientemente escolhida; ela não é um parâmetro independente a ser determinado pelo ajuste dos mínimos quadrados. Uma vez que y_1 e y_2 são encontrados, juntamente com suas variâncias e covariância estimadas, a Equação (H.12) pode ser usada para predizer o valor e a incerteza-padrão da correção a ser aplicada ao termômetro para qualquer valor t da temperatura.

H.3.2 Ajuste por mínimos quadrados

Baseado no método dos mínimos quadrados, e de acordo com as hipóteses feitas em H.3.1 acima, as grandezas de saída y_1 e y_2 e suas variâncias e covariância estimadas são obtidas minimizando-se a soma

$$S = \ \sum_{k=1}^{n} [b_k - \ y_1 - \ y_2\ (t_k - \ t_0)]^2$$

Isto conduz às seguintes equações para y_1, y_2, suas variâncias experimentais $s^2(y_1)$ e $s^2(y_2)$, e seu coeficiente de correlação estimado $r\,(y_1, y_2) = s(y_1, y_2)/s(y_1)s(y_2)$, onde $s(y_1, y_2)$ é sua covariância estimada:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)\,(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k\,\theta_k)\,(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13a}$$

$$y_2 = \frac{n \sum b_k\,\theta_k - (\sum b_k\,)\,(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13b}$$

$$s^2\,(y_1) = \frac{s^2\,\sum \theta_k^2}{D} \tag{H.13c}$$

$$s^2\,(y_2) = n\,\frac{s^2}{D} \tag{H.13d}$$

$$r\,(y_1, y_2) = -\,\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n\,\sum \theta_k^2}} \tag{H.13e}$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b\,(t_k)]^2}{n - 2} \tag{H.13f}$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - \left(\sum \theta_k\right)^2 = n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2 \tag{H.13g}$$

onde todos os somatórios são de $k = 1$ até n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\bar{\theta} = (\sum \theta_k)/\,n$, e $\bar{t} = (\sum t_k)\,/\,n$; $[b_k - b\,(t_k)]$ é a diferença entre a correção b_k medida ou observada na temperatura t_k e a correção $b(t_k)$ prevista pela curva ajustada $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ em t_k. A variância s^2 é uma medida da incerteza total do ajuste, onde o fator $n - 2$ reflete o fato de que por serem dois, y_1 e y_2, os parâmetros determinados pelas n observações, o número de graus de liberdade de s^2 é $\nu = n - 2$ (ver G.3.3).

H.3.3 Cálculo dos resultados

Os dados a serem ajustados são fornecidos na segunda e na terceira colunas da Tabela H.6. Tomando $t_0 = 20$ ℃ como a temperatura de referência, a aplicação das Equações (H.13a) a (H.13g) fornece

$y_1 = -0{,}171\,2$ ℃ $\qquad s\,(y_1) = 0{,}002\,9$ ℃

$y_2 = 0{,}002\,18$ $\qquad s\,(y_2) = 0{,}000\,67$

$r\,(y_1, y_2) = -0{,}930$ $\qquad s = 0{,}003\,5$ ℃

O fato de a inclinação y_2 ser mais de três vezes maior do que a sua incerteza-padrão fornece alguma indicação de que se demanda uma curva de calibração, e não meramente uma correção média fixa.

Tabela H.6 - Dados usados para se obter uma curva de calibração linear para um termômetro pelo método dos mínimos quadrados

Número da leitura k	Leitura do termômetro t_k (℃)	Correção observada $b_k = t_{R,k} - t_k$ (℃)	Correção prevista $b(t_k)$ (℃)	Diferença entre correções observada e prevista $b_k - b(t_k)$ (℃)
1	21,521	-0,171	-0,167 9	-0,003 1
2	22,012	-0,169	-0,166 8	-0,002 2
3	22,512	-0,166	-0,165 7	-0,000 3
4	23,003	-0,159	-0,164 6	+0,005 6
5	23,507	-0,164	-0,163 5	-0,000 5
6	23,999	-0,165	-0,162 5	-0,002 5
7	24,513	-0,156	-0,161 4	+0,005 4
8	25,002	-0,157	-0,160 3	+0,003 3
9	25,503	-0,159	-0,159 2	+0,000 2
10	26,010	-0,161	-0,158 1	-0,002 9
11	26,511	-0,160	-0,157 0	-0,003 0

A curva de calibração pode, então, ser escrita como

$$b\,(t) = -0{,}171\,2\,(29)\text{ ℃} + 0{,}002\,18\,(67)\,(t - 20\text{ ℃}) \tag{H.14}$$

onde os números entre parênteses são os valores numéricos das incertezas-padrão correspondentes aos últimos dígitos dos resultados citados para o intercepto e a inclinação (ver 7.2.2). Esta equação fornece o valor previsto da correção $b(t)$ em qualquer temperatura t e, em particular, o valor $b(t_k)$ em $t = t_k$. Estes valores são dados na quarta coluna da tabela, enquanto que a última coluna fornece as diferenças entre os valores medidos e previstos, $b_k - b(t_k)$. Uma análise dessas diferenças pode ser utilizada para verificar a validade do modelo linear; testes formais existem (ver Referência [8]), porém não são considerados neste exemplo.

H.3.4 Incerteza de um valor previsto

A expressão para a incerteza-padrão combinada do valor previsto de uma correção pode ser prontamente obtida aplicando-se a lei de propagação de incertezas, Equação (16) em 5.2.2, à Equação (H.12). Notando-se que $b(t) = f(y_1, y_2)$ e escrevendo-se $u(y_1) = s(y_1)$ *e* $u(y_2) = s(y_2)$, obtém-se

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)u(y_1)u(y_2)r(y_1, y_2) \tag{H.15}$$

A variância estimada $u_c^2[b(t)]$ é um mínimo em $t_{min} = t_0 - u(y_1)r(y_1, y_2)/u(y_2)$ que, no presente caso, é $t_{min} = 24{,}008\,5$ ℃.
Como um exemplo do uso da Equação (H.15) considere que se requeira a correção para o termômetro e sua incerteza em $t = 30$ ℃, valor fora da faixa de temperatura na qual o termômetro foi realmente calibrado. Substituindo $t = 30$ ℃ na Equação (H.14) resulta

$$b(30\text{ ℃}) = -0{,}149\,4\text{ ℃}$$

enquanto que a Equação (H.15) se torna

$$u_c^2[b(30\ ℃)] = (0{,}002\ 9\ ℃)^2 + (10\ ℃)^2(0{,}000\ 67)^2 + 2(10\ ℃)(0{,}002\ 9\ ℃)(0{,}000\ 67)(-0{,}930)$$
$$= 17{,}1 \times 10^{-6}\ ℃^{2}$$

ou

$$u_c[b(30\ ℃)] = 0{,}004\ 1\ ℃$$

Assim, a correção em $30\ ℃$ é $-0{,}149\ 4\ ℃$, com uma incerteza-padrão combinada de $u_c = 0{,}004\ 1\ ℃$, e com u_c tendo $\nu = n - 2 = 9$ graus de liberdade.

H.3.5 Eliminação da correlação entre a inclinação e o intercepto

A Equação (H.13e) para o coeficiente de correlação $r(y_1, y_2)$ implica que, se t_0 é escolhido de forma tal que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0) = 0$, então $r(y_1, y_2) = 0$ e y_1 e y_2 serão não-correlacionados, simplificando, portanto, o cálculo da incerteza-padrão de uma correção prevista. Uma vez que $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 0$ quando $t_0 = \bar{t} = (\sum_{k=1}^{n} t_k)/n$, e $\bar{t} = 24{,}008\ 5\ ℃$ no presente caso, a repetição do ajuste de mínimos quadrados com $t_0 = \bar{t} = 24{,}008\ 5\ ℃$ levaria a valores de y_1 e y_2 não-correlacionados. (A temperatura $\bar{t}$ é também a temperatura na qual $u^2[b(t)]$ é um mínimo — ver H.3.4). Entretanto, repetir o ajuste é desnecessário porque pode ser mostrado que

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \tag{H.16a}$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \tag{H.16b}$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \tag{H.16c}$$

onde

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

e, ao escrever a Equação (H.16b), foram feitas as substituições $u(y_1') = s(y_1')$ e $u(y_2) = s(y_2)$ [ver Equação (H.15)].

Aplicando essas relações aos resultados fornecidos em H.3.3 tem-se

$$b(t) = -0{,}162\ 5(11) + 0{,}002\ 18(67)(t - 24{,}008\ 5\ ℃) \tag{H.17a}$$

$$u_c^2[b(t)] = (0{,}001\ 1)^2 + (t - 24{,}008\ 5\ ℃)^2(0{,}000\ 67)^2 \tag{H.17b}$$

Pode-se verificar que estas expressões fornecem os mesmos resultados que as Equações (H.14) e (H.15) repetindo-se o cálculo de $b(30\ ℃)$ e $u_c[b(30\ ℃)]$. Substituindo $t = 30\ ℃$ nas Equações (H.17a) e (H.17b) tem-se

$$b(30\ ℃) = -0{,}149\ 4\ ℃$$

$$u_c[b(30\ ℃)] = 0{,}004\ 1\ ℃$$

que são idênticos aos resultados obtidos em H.3.4. A covariância estimada entre duas correções previstas $b(t_1)$ e $b(t_2)$ pode ser obtida da Equação (H.9) em H.2.3.

H.3.6 Outras considerações

O método dos mínimos quadrados pode ser usado para ajustar curvas de ordem superior aos pontos correspondentes aos dados, e é também aplicável aos casos em que os dados individuais têm incertezas. Textos de referência sobre o assunto devem ser consultados para maiores detalhes [8]. Entretanto, os seguintes exemplos ilustram dois casos nos quais as correções medidas b_k são supostas como não exatamente conhecidas.

1) Considere que cada t_k tenha uma incerteza desprezível, que cada um dos n valores $t_{R,k}$ seja obtido de uma série de m leituras repetidas e que a estimativa agrupada de variância para tais leituras, baseada em uma grande quantidade de dados obtidos ao longo de muitos meses, seja s_p^2. Então a variância estimada de cada $t_{R,k}$ é $s_p^2/m = u_0^2$ e cada correção observada $b_k = t_{R,k} - t_k$ tem a *mesma* incerteza-padrão u_0. Sob estas circunstâncias (e sob a suposição de que não existe razão para crer que o modelo linear seja incorreto) u_0^2 substitui s^2 nas Equações (H.13c) e (H.13d).

   NOTA Uma estimativa agrupada de variância s_p^2 baseada em N séries de observações independentes da mesma variável aleatória é obtida de

   $$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

   onde s_i^2 é a variância experimental da *i*-ésima série de n_i observações repetidas independentes [Equação (4) em 4.2.2] e tem número de graus de liberdade $\nu_i = n_i - 1$. O número de graus de liberdade de s_p^2 é $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. A variância experimental s_p^2/m (e o desvio-padrão experimental $s_p/\sqrt{m}$) da média aritmética de m observações independentes, caracterizada pela estimativa agrupada da variância s_p^2, tem também ν graus de liberdade.

2) Suponha que cada t_k tenha incerteza desprezível, que uma correção ε_k seja aplicada a cada um dos n valores $t_{R,k}$, e que cada correção tenha a mesma incerteza-padrão u_a. Então, a incerteza-padrão de cada $b_k = t_{R,k} - t_k$ é também u_a, e $s^2(y_1)$ é substituído por $s^2(y_1) + u_a^2$ e $s^2(y_1')$ é substituído por $s^2(y_1') + u_a^2$.

H.4 Medição de atividade

Este exemplo é similar ao exemplo H.2, a medição simultânea de resistência e reatância, no qual os dados podem ser analisados de duas maneiras diferentes, fornecendo essencialmente o mesmo resultado numérico. O primeiro enfoque ilustra, mais uma vez, a necessidade de se levarem em conta as correlações observadas entre as grandezas de entrada.

H.4.1 O problema da medição

A concentração desconhecida de atividade do radônio (^{222}Rn) em uma amostra de água é determinada pela comparação entre as contagens por cintilação em meio líquido da amostra e de uma amostra padrão de radônio em água com concentração de atividade conhecida. A concentração de atividade desconhecida é obtida medindo-se três fontes de contagem consistindo de aproximadamente 5 g de água e 12 g de emulsão cintiladora orgânica em frascos de 22 ml de volume:

Fonte (a) um *padrão* consistindo de uma massa m_S da solução padrão com concentração de atividade conhecida;

Fonte (b) uma amostra equivalente de água sem material radioativo (*branco*) usada para obter a taxa de contagem de fundo;

Fonte (c) a *amostra* consistindo de uma alíquota de massa m_x com concentração de atividade desconhecida.

Seis ciclos de medição das três fontes de contagem são realizados nesta ordem: padrão – branco – amostra; e cada intervalo de contagem T_0, com tempo morto corrigido para cada fonte durante todos os seis ciclos é de 60 minutos. Embora a taxa de contagem de fundo não possa ser suposta como constante durante todo o intervalo de contagem (65 horas), supõe-se que o número de contagens obtido para cada branco possa ser usado como representativo da taxa de contagem de fundo durante as medições do padrão e da amostra no mesmo ciclo. Os dados são fornecidos na Tabela H.7, onde

t_S, t_B, t_x são os tempos desde o tempo de referência $t = 0$ até o ponto médio dos intervalos de contagem corrigidos por tempo morto $T_0 = 60$ min para os frascos padrão, branco e amostra, respectivamente; embora t_B seja dado para completeza, ele não é necessário à análise;

C_S, C_B, C_x são os números de contagens registrados nos intervalos de contagem corrigidos por tempo morto $T_0 = 60$ min para os frascos padrão, branco e amostra, respectivamente.

As contagens observadas podem ser expressas como

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S} \tag{H.18a}$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \tag{H.18b}$$

onde

ε é a eficiência de detecção da cintilação em meio líquido para ^{222}Rn para uma dada composição de fonte, suposta como sendo independente do nível de atividade;

A_S é a concentração de atividade do padrão no tempo de referência $t = 0$;

A_x é o mensurando e é definido como a concentração de atividade desconhecida da amostra no tempo de referência $t = 0$;

m_S é a massa da solução padrão;

m_x é a massa da alíquota da amostra;

λ é a constante de decaimento para o ^{222}Rn:
$\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}258\ 94 \times 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$ ($T_{1/2} = 5\ 505{,}8$ min).

Tabela H.7 - Dados de contagem para determinação da concentração de atividade de uma amostra desconhecida

Ciclo	Padrão		Branco		Amostra	
k	t_S (min)	C_S (contagem)	t_B (min)	C_B (contagem)	t_x (min)	C_x (contagem)
1	243,74	15 380	305,56	4 054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1 046,10	3 922	1 107,66	38 706
3	1 723,87	14 394	1 785,43	4 200	1 846,99	35 860
4	2 463,17	13 254	2 524,73	3 830	2 586,28	32 238
5	3 217,56	12 516	3 279,12	3 956	3 340,68	29 640
6	3 956,83	11 058	4 018,38	3 980	4 079,94	26 356

As Equações (H.18a) e (H.18b) indicam que nenhum dos seis valores individuais, seja de C_S ou de C_x, dados na Tabela H.7, pode fornecer diretamente uma média por causa do decaimento exponencial da atividade do padrão e da amostra, e de pequenas variações nas contagens do branco de um ciclo para outro. Em vez disso, deve-se trabalhar com contagens corrigidas para o decaimento e para o branco (ou taxas de contagem definidas como o número de contagens dividido por T_0 = 60 min). Isto sugere a combinação das Equações (H.18a) e (H.18b) para obter a seguinte expressão para a concentração desconhecida em termos das grandezas conhecidas:

$$\begin{aligned} A_x &= f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}} \\ &= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)}{(C_S - C_B)} e^{\lambda(t_x - t_S)} \end{aligned} \tag{H.19}$$

onde $(C_x - C_B)e^{\lambda t_x}$ e $(C_S - C_B)e^{\lambda t_S}$ são, respectivamente, as contagens da amostra e do padrão corrigidas em relação ao branco no tempo de referência $t = 0$ e para o intervalo de tempo T_0 = 60 min. Alternativamente, pode-se simplesmente escrever

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \tag{H.20}$$

onde as *taxas de contagem*, R_x e R_S, corrigidas em relação ao branco e ao decaimento são dadas por

$$R_x = [(C_x - C_B)/T_0]e^{\lambda t_x} \tag{H.21a}$$

$$R_S = [(C_S - C_B)/T_0]e^{\lambda t_S} \tag{H.21b}$$

H.4.2 Análise de dados

A Tabela H.8 resume os valores das taxas de contagem R_S e R_x corrigidas pelas contagens do branco e do decaimento, calculados a partir das Equações (H.21a) e (H.21b) usando os dados da Tabela H.7 e λ = 1,258 94 x 10^{-4} min^{-1}, como fornecidos anteriormente. Deve-se notar que a razão $R = R_x/R_S$ é calculada, de forma mais simples, pela expressão

$$[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)]e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

As médias aritméticas $\overline{R}_S$, $\overline{R}_x$ e $\overline{R}$, e seus desvios-padrão experimentais $s(\overline{R}_S)$, $s(\overline{R}_x)$ e $s(\overline{R})$, são calculados do modo usual [Equações (3) e (5), em 4.2]. O coeficiente de correlação $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)$ é calculado pela Equação (17) em 5.2.3 e pela Equação (14) em 5.2.2.

Em vista da variabilidade comparativamente pequena dos valores de R_x e de R_S, a razão das médias $\overline{R}_x/\overline{R}_S$ e sua incerteza-padrão $u(\overline{R}_x/\overline{R}_S)$ são, respectivamente, quase as mesmas que a razão média $\overline{R}$ e seu desvio-padrão experimental $s(\overline{R})$, como fornecidos na última coluna da Tabela H.8 [ver H.2.4 e a Equação (H.10)]. Entretanto, ao calcular a incerteza-padrão $u(\overline{R}_x/\overline{R}_S)$, a correlação entre R_x e R_S, como representada pelo coeficiente de correlação $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)$, deve ser levada em conta usando a Equação (16) em 5.2.2. [Essa equação fornece, para a variância relativa estimada de $\overline{R}_x/\overline{R}_S$, os últimos três termos da Equação (H.22b)].

Deve-se reconhecer que os respectivos desvios-padrão experimentais de R_x e de R_S, $\sqrt{6}s(\overline{R}_x)$ e $\sqrt{6}s(\overline{R}_S)$, indicam uma variabilidade nessas grandezas que é duas a três vezes maior que a variabilidade deduzida pela estatística de Poisson do processo de contagem, sendo que a última é incluída na variabilidade observada de contagem e não precisa ser contabilizada separadamente.

Tabela H.8 – Cálculo das taxas de contagem corrigidas pelo branco e pelo decaimento

Ciclo k	R_x (min^{-1})	R_S (min^{-1})	$t_x - t_S$ (min)	$R = R_x/R_S$
1	652,46	194,65	123,63	3,352 0
2	666,48	208,58	123,13	3,195 3
3	665,80	211,08	123,12	3,154 3
4	655,68	214,17	123,11	3,061 5
5	651,87	213,92	123,12	3,047 3
6	623,31	194,13	123,11	3,210 7
	$\bar{R}_x = 652{,}60$ $s(\bar{R}_x) = 6{,}42$ $s(\bar{R}_x)/\bar{R}_x = 0{,}98 \times 10^{-2}$	$\bar{R}_S = 206{,}09$ $s(\bar{R}_S) = 3{,}79$ $s(\bar{R}_S)/\bar{R}_S = 1{,}84 \times 10^{-2}$		$\bar{R} = 3{,}170$ $s(\bar{R}) = 0{,}046$ $s(\bar{R})/\bar{R} = 1{,}44 \times 10^{-2}$
	$\bar{R}_x/\bar{R}_S = 3{,}167$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 0{,}045$ $u(\bar{R}_x/\bar{R}_S)/(\bar{R}_x/\bar{R}_S) = 1{,}42 \times 10^{-2}$			
Coeficiente de correlação				
$r(\bar{R}_x, \bar{R}_S) = 0{,}646$				

H.4.3 Cálculo dos resultados finais

Para obter a desconhecida concentração de atividade A_x e sua incerteza-padrão combinada $u_c(A_x)$ pela Equação (H.20) são requeridas A_S, m_x e m_S e suas incertezas-padrão. Estas são fornecidas como

$A_S = 0{,}136\ 8$ Bq/g

$u(A_S) = 0{,}001\ 8$ Bq/g; $u(A_S)/A_S = 1{,}32 \times 10^{-2}$

$m_s = 5{,}019\ 2$ g

$u(m_S) = 0{,}005\ 0$ g; $u(m_S)/m_S = 0{,}10 \times 10^{-2}$

$m_x = 5{,}057\ 1$ g

$u(m_x) = 0{,}001\ 0$ g; $u(m_x)/m_x = 0{,}02 \times 10^{-2}$

Outras possíveis fontes de incerteza são avaliadas como sendo desprezíveis:

— incertezas-padrão dos tempos de decaimento, $u(t_{S,k})$ e $u(t_{x,k})$;

— incerteza-padrão da constante de decaimento do ^{222}Rn, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7}$ min^{-1}. (A grandeza significativa é o fator de decaimento exp$[\lambda(t_x - t_S)]$, que varia de 1,015 63 para os ciclos $k = 4$ e $k = 6$, até 1,015 70 para o ciclo $k = 1$. A incerteza-padrão desses valores é $u = 1{,}2 \times 10^{-5}$);

— incerteza associada com a possível dependência da eficiência de detecção do contador de cintilação com relação à fonte utilizada (padrão, branco e amostra);

— incerteza da correção para o tempo morto do contador e da correção para a dependência da eficiência de contagem com relação ao nível de atividade.

H.4.3.1 Resultados: abordagem 1

Como indicado anteriormente, A_x e $u_c(A_x)$ podem ser obtidos de dois modos diferentes a partir da Equação (H.20). Na primeira abordagem, A_x é calculado usando as médias aritméticas $\overline{R}_x$ e $\overline{R}_S$, o que leva a

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_S} = 0{,}430\ 0 \text{ Bq/g} \tag{H.22a}$$

A aplicação da Equação (16) em 5.2.2 a esta expressão resulta para a variância combinada $u_c^2(A_x)$

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_x)}{\overline{R}_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_S)}{\overline{R}_S^2} - 2r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)\frac{u(\overline{R}_x)u(\overline{R}_S)}{\overline{R}_x\,\overline{R}_S} \tag{H.22b}$$

onde, como observado em H.4.2, os últimos três termos fornecem $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_S)/(\overline{R}_x/\overline{R}_S)^2$, que é a variância relativa estimada de $\overline{R}_x/\overline{R}_S$. De acordo com a discussão de H.2.4, os resultados na Tabela H.8 mostram que $\overline{R}$ não é exatamente igual a $\overline{R}_x/\overline{R}_S$; e que a incerteza-padrão $u(\overline{R}_x/\overline{R}_S)$ de $\overline{R}_x/\overline{R}_S$ não é exatamente igual à incerteza-padrão $s(\overline{R})$ de $\overline{R}$.

A substituição dos valores das grandezas relevantes nas Equações (H.22a) e (H.22b) fornece

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}008\ 3 \text{ Bq/g}$$

O resultado da medição pode, então, ser declarado como:

$A_x = 0{,}430\ 0$ Bq/g, com uma incerteza-padrão combinada $u_c = 0{,}008\ 3$ Bq/g.

H.4.3.2 Resultados: abordagem 2

Na segunda abordagem, que evita a correlação entre $\overline{R}_x$ e $\overline{R}_S$, A_x é calculada usando a média aritmética $\overline{R}$. Assim

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \overline{R} = 0{,}430\ 4 \text{ Bq/g} \tag{H.23a}$$

A expressão para $u_c^2(A_x)$ é simplesmente

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R})}{\overline{R}^2} \tag{H.23b}$$

que leva a

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}95\text{x}10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}008\ 4 \text{ Bq/g}$$

O resultado da medição pode então ser declarado como:

$A_x = 0{,}430\ 4$ Bq/g, com uma incerteza-padrão combinada de $u_c = 0{,}008\ 4$ Bq/g.

O número efetivo de graus de liberdade de u_c pode ser avaliado usando-se a fórmula de Welch-Satterthwaite, como ilustrado em H.1.6.

Como em H.2, entre os dois resultados prefere-se o segundo, porque ele evita a aproximação da média da razão de duas grandezas pela razão das médias das duas grandezas; e ele reflete melhor o procedimento de medição utilizado — os dados foram coletados, de fato, em ciclos separados.

Todavia, a diferença entre os valores de A_x resultantes dos dois enfoques é claramente pequena comparada com a incerteza-padrão atribuída a cada um, e a diferença entre as duas incertezas-padrão é totalmente desprezível. Tal concordância entre os resultados demonstra que os dois enfoques são equivalentes quando as correlações observadas são apropriadamente levadas em conta.

H.5 Análise de variância

Este exemplo fornece uma breve introdução aos métodos de análise de variância (ANOVA). Estas técnicas estatísticas são utilizadas para identificar e quantificar *efeitos aleatórios* individuais em uma medição, de modo que possam ser apropriadamente levados em conta quando se avalia a incerteza do resultado da medição. Embora os métodos ANOVA sejam aplicáveis a uma ampla faixa de medições, como, por exemplo, calibração de padrões de referência, tais como padrões de tensão Zener e padrões de massa, e certificação de materiais de referência, eles, por si mesmos, não podem identificar efeitos sistemáticos que possam estar presentes.

Existem muitos modelos diferentes incluídos sob o nome geral de ANOVA. Devido à sua importância, o modelo específico discutido neste exemplo é o arranjo aninhado balanceado[1]. A ilustração numérica deste modelo envolve a calibração de um padrão de tensão Zener; a análise pode ser relevante para uma variedade de situações práticas de medição.

Métodos ANOVA são de importância especial na certificação de materiais de referência (MRs) por ensaios interlaboratoriais, um tópico coberto extensivamente pelo Guia ISO 35 [19] (ver H.5.3.2 para uma breve descrição da certificação de MRs). Como muito do material contido no Guia ISO 35 é sem dúvida largamente aplicável, esta publicação pode ser consultada para detalhes adicionais relativos à ANOVA, incluindo arranjos aninhados não balanceados. As referências [15] e [20] podem ser igualmente consultadas.

H.5.1 O problema da medição

Considere-se um padrão de tensão Zener de 10 V nominais calibrado contra uma referência de tensão estável, por um período de duas semanas. Em cada um dos J dias durante o período foram realizadas K observações repetidas independentes da diferença de potencial V_S do padrão. Se V_{jk} denota a k-ésima observação de $V_S (k = 1, 2, \ldots, K)$ no j-ésimo dia $(j = 1, 2, \ldots, J)$, a melhor estimativa da diferença de potencial do padrão é a média aritmética $\overline{V}$ das JK observações [ver Equação (3) em 4.2.1],

$$V_S = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V} \tag{H.24a}$$

O desvio-padrão experimental da média $s(\overline{V})$, que é uma medida da incerteza de $\overline{V}$, sendo esta uma estimativa da diferença de potencial do padrão Zener (com relação à referência), é obtido de [ver Equação (5), em 4.2.3.]

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk}-\overline{V})^2 \tag{H.24b}$$

NOTA Supõe-se ao longo deste exemplo que todas as correções aplicadas às observações para compensar efeitos sistemáticos tenham incertezas desprezíveis, ou que suas incertezas sejam tais que possam ser levadas em conta no final da análise. Uma correção que se encaixa nesta última categoria, e que pode ser ela mesma aplicada à média das observações no final da análise, é a diferença entre o valor certificado (supostamente tendo uma dada incerteza) e o valor de trabalho da tensão de referência estável contra a qual o padrão de tensão Zener é calibrado. Assim, a estimativa da diferença de potencial do padrão, obtida estatisticamente a partir das observações, não é, necessariamente, o resultado final da medição; e o desvio-padrão experimental da estimativa não é, necessariamente, a incerteza-padrão combinada do resultado final.

O desvio-padrão experimental da média $s(\overline{V})$, como obtido da Equação (H.24b), é uma medida apropriada da incerteza de $\overline{V}$ somente se a variabilidade das observações dia-a-dia for a mesma que a variabilidade das observações realizadas em um único dia. Se existir evidência de que a variabilidade entre-dias seja significativamente maior do que se possa esperar da variabilidade intra-dia (em um mesmo dia), a utilização dessa expressão poderia levar a uma declaração consideravelmente subestimada da incerteza de $\overline{V}$. Assim, duas questões surgem: como se deve decidir se a variabilidade entre dias (caracterizada por um componente entre-dias da variância) é significativa em comparação à variabilidade em um mesmo dia (caracterizada por um componente intra-dia da variância) e, se isso ocorrer, como se deve avaliar a incerteza da média?

H.5.2 Um exemplo numérico

H.5.2.1 Os dados que permitem tratar as questões acima são fornecidos na Tabela H.9, onde

$J = 10$ é o número de dias nos quais as observações da diferença de potencial foram realizadas;
$K = 5$ é o número de observações da diferença de potencial realizadas em cada dia;

$$\overline{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25a}$$

é a média aritmética das K = 5 observações da diferença de potencial realizadas no j-ésimo dia (existem J = 10 médias diárias);

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25b}$$

é a média aritmética das J = 10 médias diárias e, consequentemente, a média global das JK = 50 observações;

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}\left(V_{jk} - \overline{V}_j\right)^2 \tag{H.25c}$$

é a variância experimental das K = 5 observações realizadas no j-ésimo dia (existem J = 10 estimativas da variância); e

$$s^2(\overline{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{V}_j - \overline{V}\right)^2 \tag{H.25d}$$

é a variância experimental das J = 10 médias diárias (existe somente uma estimativa desta variância).

H.5.2.2 A consistência da variabilidade intra-dia e da variabilidade entre-dias das observações pode ser investigada comparando-se duas estimativas independentes de σ_W^2, a componente intra-dia da variância (isto é, a variância das observações realizadas no mesmo dia).

A primeira estimativa de σ_W^2, denotada por s_a^2, é obtida da variação observada das médias diárias $\overline{V}_j$. Como $\overline{V}_j$ é a média de K observações, sua variância estimada $s^2(\overline{V}_j)$, sob a hipótese de que o componente entre-dias da variância seja zero, estima σ_W^2/K. Segue, então, da Equação (H.25d) que

$$s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{V}_j - \overline{V}\right)^2 \tag{H.26a}$$

que é uma estimativa de σ_W^2 com $\nu_a = J - 1$ = 9 graus de liberdade.

A segunda estimativa de σ_W^2, denotada por s_b^2, é a estimativa agrupada da variância obtida dos $J = 10$ valores individuais de $s^2(V_{jk})$ utilizando-se a equação da nota de H.3.6, na qual os dez valores individuais são calculados a partir da Equação (H.25c). Em razão de o número de graus de liberdade de cada um destes valores ser $\nu_i = K - 1$, a expressão resultante para s_b^2 é, simplesmente, sua média. Assim

$$s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} s^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(V_{jk} - \overline{V}_j\right)^2 \tag{H.26b}$$

que é uma estimativa de σ_W^2 com $\nu_\mathrm{b} = J(K-1) = 40$ graus de liberdade.

As estimativas de σ_W^2 dadas pelas Equações (H.26a) e (H.26b) são $s_a^2 = (128\ \mu\mathrm{V})^2$ e $s_b^2 = (85\ \mu\mathrm{V})^2$, respectivamente (ver Tabela H.9). Como a estimativa s_a^2 é baseada na variabilidade das médias diárias enquanto a estimativa s_b^2 é baseada na variabilidade das observações diárias, sua diferença indica a possível presença de um efeito que varia de um dia para outro, mas que permanece relativamente constante quando as observações são realizadas em um único dia. O teste-F é utilizado para verificar essa possibilidade e, consequentemente, a suposição de que o componente entre-dias da variância seja zero.

H.5.2.3 A distribuição-F é a distribuição de probabilidade da razão $F(\nu_a, \nu_b) = s_a^2(\nu_a)/s_b^2(\nu_b)$ de duas estimativas independentes, $s_a^2(\nu_a)$ e $s_b^2(\nu_b)$, da variância σ^2 de uma variável aleatória normalmente distribuída [15]. Os parâmetros ν_a e ν_b são os respectivos números de graus de liberdade das duas estimativas e $0 \leq F(\nu_a, \nu_b) < \infty$. Valores de F são tabulados para diferentes valores de ν_a e ν_b e vários quartis da distribuição-F. Um valor de $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,95}$ ou $F(\nu_a, \nu_b) > F_{0,975}$ (o valor crítico) é usualmente interpretado como indicação de que $s_a^2(\nu_a)$ é maior do que $s_b^2(\nu_b)$ por uma quantidade estatisticamente significativa; e que a probabilidade de um valor de F tão grande quanto aquele observado, se as duas estimativas forem estimativas da mesma variância, é menor do que 0,05 ou 0,025, respectivamente. (Outros valores críticos podem também ser escolhidos, tal como $F_{0,99}$.)

Tabela H.9 — Resumo dos dados de calibração do padrão de tensão obtidos em J = 10 dias. $\overline{V}_j$ (média obtida no dia J) e $s(V_{jk})$ (desvio padrão experimental) são ambos baseados em K = 5 observações diárias repetidas independentes.

Grandeza	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{V}_j$ /V	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})$ /µV	60	77	111	101	67	93	80	73	88	86

$\overline{V} = 10{,}000\ 097\ \mathrm{V}$ $s(\overline{V}_j) = 57\ \mu\mathrm{V}$

$s_a^2 = K s^2(\overline{V}_j) = 5(57\ \mu\mathrm{V})^2 = (128\ \mu\mathrm{V})^2$ $s_b^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu\mathrm{V})^2$

H.5.2.4 A aplicação do teste-F ao presente exemplo numérico fornece

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{5(57\ \mu V)^2}{(85\ \mu V)^2} = 2{,}25 \tag{H.27}$$

com $\nu_a = J - 1 = 9$ graus de liberdade no numerador e $\nu_b = J(K-1) = 40$ graus de liberdade no denominador. Como $F_{0,95}(9{,}40) = 2{,}12$ e, $F_{0,975}(9{,}40) = 2{,}45$, conclui-se que existe um efeito entre-dias estatisticamente significativo no nível de 5 por cento de significância, mas não no nível de 2,5 por cento.

H.5.2.5 Se a existência de um efeito entre-dias é rejeitada porque a diferença entre s_a^2 e s_b^2 não é vista como estatisticamente significativa (uma decisão imprudente, pois poderia levar a uma subestimação da incerteza), a variância estimada $s^2(\bar{V})$ de $\bar{V}$ deve ser calculada da Equação (H.24b). Esta relação é equivalente a agrupar as estimativas s_a^2 e s_b^2 (isto é, tomando-se a média ponderada de s_a^2 e s_b^2 cada uma ponderada por seus respectivos números de graus de liberdade ν_a e ν_b - ver nota de H.3.6) para obter a melhor estimativa da variância das observações; e dividir essa estimativa por JK (o número de observações) para obter a melhor estimativa $s^2(\bar{V})$ da variância da média das observações. Seguindo este procedimento, temos

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} = \frac{9(128\ \mu\text{V})^2 + 40(85\ \mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)} \tag{H.28a}$$

$$s^2(\bar{V}) = (13\ \mu\text{V})^2,\ \ ou\quad s(\bar{V}) = 13\ \mu\text{V} \tag{H.28b}$$

com $s(\bar{V})$ tendo $JK - 1 = 49$ graus de liberdade.

Se supomos que todas as correções para os efeitos sistemáticos já tenham sido levadas em conta e todos os outros componentes da incerteza são não-significativos, então o resultado da calibração pode ser declarado como $V_S = \bar{V} = 10{,}000\ 097$ V (ver Tabela H.9), com uma incerteza-padrão combinada de $s(\bar{V}) = u_c = 13$ μV, e com u_c tendo 49 graus de liberdade.

NOTA 1 Na prática haveria, muito provavelmente, componentes adicionais de incerteza que seriam significativos e, portanto, deveriam ser combinados com o componente de incerteza obtido estatisticamente a partir das observações (ver nota de H.5.1).

NOTA 2 Pode-se mostrar que a Equação (H.28a), para $s^2(\bar{V})$, é equivalente à Equação (H.24b) escrevendo-se a dupla soma nesta equação, denotada por S, como

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left[\left(V_{jk} - \bar{V}_j\right) + \left(\bar{V}_j - \bar{V}\right)\right]^2 = (J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Se a existência de um efeito entre-dias é aceita (uma decisão prudente porque evita uma possível subestimação da incerteza) e supõe-se que ele seja aleatório, então a variância $s^2(\bar{V}_j)$ calculada a partir das $J = 10$ médias diárias, de acordo com a Equação (H.25d), não estima σ_W^2/K, como postulado em H.5.2.2, mas $\sigma_W^2/K + \sigma_B^2$ onde σ_B^2 é o componente aleatório entre-dias da variância. Isso implica que

$$s^2(\bar{V}_j) = s_W^2/K + s_B^2 \tag{H.29}$$

onde s_W^2 estima σ_W^2 e s_B^2 estima σ_B^2. Como $\overline{s^2(V_{jk})}$ calculado a partir da Equação (H.26b) depende somente da variabilidade intra-dia das observações, pode-se tomar $s_W^2 = \overline{s^2(V_{jk})}$. Assim, a razão $Ks^2(\bar{V}_j)/\overline{s^2(V_{jk})}$ utilizada para o teste-F em H.5.2.4 se torna

$$F = \frac{Ks^2(\bar{V}_j)}{\overline{s^2(V_{jk})}} = \frac{s_W^2 + Ks_B^2}{s_W^2} = \frac{5(57\ \mu\text{V})^2}{(85\ \mu\text{V})^2} = 2{,}25 \tag{H.30}$$

o que leva a

$$s_B^2 = \frac{\mathrm{K}s^2(\overline{\mathrm{V}}_\mathrm{j}) - \overline{s^2(\mathrm{V}_\mathrm{jk})}}{\mathrm{K}} \tag{H.31a}$$

$$s_\mathrm{B}^2 = (43\ \mu\mathrm{V})^2, \ \text{ou} \ \ s_\mathrm{B} = 43\ \mu\mathrm{V}$$

$$s_w^2 = \overline{s^2(\mathrm{V}_\mathrm{jk})} = (85\ \mu\mathrm{V})^2, \ ou \ \ s_w = 85\ \mu\mathrm{V} \tag{H.31b}$$

A variância estimada de $\bar{V}$ é obtida de $s^2(\bar{V}_j)$, Equação (H.25d), porque $s^2(\bar{V}_j)$ reflete apropriadamente ambos os componentes aleatórios, intra e entre-dias da variância [ver Equação (H.29)]. Assim

$$s^2(\bar{V}) = s^2(\bar{V}_j)/J \tag{H.32}$$

$$= (57\ \mu\mathrm{V})^2/10, \ \text{ou} \ \ s(\bar{V}) = 18\ \mu\mathrm{V}$$

com $s(\bar{V})$ tendo $J - 1 = 9$ graus de liberdade.

O número de graus de liberdade de s_w^2 (e, portanto, de s_w) é $J(K - 1) = 40$ [ver Equação (H.26b)]. O número de graus de liberdade de s_B^2 (e, portanto, s_b) é o número efetivo de graus de liberdade da diferença $s_B^2 = s^2(\bar{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ [Equação (H.31a)], mas sua estimação é problemática.

H.5.2.7 A melhor estimativa da diferença de potencial do padrão de tensão é, portanto, $V_S = \bar{V} =$ 10,000 097 V, com $s(\bar{V}) = u_c =$ 18 μV, como dado pela Equação (H.32). Este valor de u_c e seus 9 graus de liberdade devem ser comparados com $u_c =$ 13 μV e seus 49 graus de liberdade, o resultado obtido em H.5.2.5 [Equação (H.28b)], quando a existência de um efeito inter- dia foi rejeitada.

Em uma medição real, um efeito entre-dias aparente deve ser, se possível, melhor investigado, a fim de se determinar sua causa e verificar se um efeito sistemático está presente, o que impediria o uso de métodos ANOVA. Como apontado no início deste exemplo, técnicas ANOVA são projetadas para identificar e avaliar componentes de incerteza que surgem de efeitos aleatórios; elas não fornecem informações sobre componentes que surgem de efeitos sistemáticos.

H.5.3 O papel da ANOVA em medição

H.5.3.1 Este exemplo do padrão de tensão ilustra o que é geralmente chamado de arranjo aninhado balanceado de um estágio. É um arranjo aninhado de um estágio porque existe um nível de "aninhamento" das observações, com um fator, o dia em que as observações foram realizadas, sendo variado na medição. É balanceado (ou equilibrado), pois o mesmo número de observações é realizado a cada dia. A análise apresentada no exemplo pode ser utilizada para determinar se existe um "efeito de operador", um "efeito de instrumento", um "efeito laboratorial", um "efeito amostral", ou mesmo um "efeito metodológico" em uma determinada medição. Assim, no exemplo acima, pode-se imaginar a substituição das observações feitas em J dias diferentes por observações feitas no mesmo dia, mas por J operadores diferentes; o componente entre-dias da variância se torna então um componente de variância associado a diferentes operadores.

H.5.3.2 Como observado em H.5, métodos ANOVA são largamente utilizados na certificação de materiais de referência (MRs) por ensaios inter-laboratoriais. Tal certificação envolve, usualmente, um número de laboratórios independentes, igualmente competentes, todos eles medindo, em amostras de um material, a propriedade na qual o material deverá ser certificado. Geralmente se supõe que as diferenças entre resultados individuais, tanto intra como inter-laboratórios, são de natureza estatística, independente de quais sejam as causas. A média de cada laboratório é considerada como uma estimativa não-tendenciosa da propriedade do material e, usualmente, supõe-se a média não ponderada das médias dos laboratórios como sendo a melhor estimativa dessa propriedade.

Uma certificação de MR pode envolver I diferentes laboratórios, cada um dos quais medindo a propriedade requerida de J diferentes amostras do material, com cada medição de uma amostra consistindo de K observações repetidas e independentes. Assim, o número total de observações é IJK, e o número total de amostras é IJ. Este é um exemplo de um arranjo aninhado balanceado de dois estágios, análogo ao exemplo de um estágio como tratado anteriormente para o padrão de tensão. Nesse caso, há dois níveis de “aninhamento” das observações, com dois fatores diferentes, amostra e laboratório, sendo variados na medição. Esse arranjo é balanceado porque cada amostra é observada o mesmo número de vezes (K) em cada laboratório e cada um medindo o mesmo número de amostras (J). Seguindo-se a analogia com o exemplo do padrão de tensão, no caso do material de referência, o propósito da análise dos dados é investigar a possível existência de um efeito interamostras e de um efeito inter-laboratórios, e determinar a incerteza apropriada a ser atribuída à melhor estimativa do valor da propriedade a ser certificada. Mantendo-se o desenvolvimento do parágrafo anterior, supõe-se que esta estimativa seja a média das I médias dos laboratórios, que é também a média das IJK observações.

H.5.3.3 A importância de se variarem as grandezas de entrada das quais depende o resultado da medição, de forma que sua incerteza seja baseada nos dados observados avaliados estatisticamente, é ressaltada em 3.4.2. Os arranjos aninhados e a análise dos dados obtidos pela aplicação de métodos ANOVA podem ser utilizados com sucesso em muitas situações de medição encontradas na prática.

Não obstante, como indicado em 3.4.1, variar todas as grandezas de entrada é raramente possível devido à limitação de tempo e de recursos; na melhor das hipóteses, na maioria das situações práticas de medição, é possível somente avaliar alguns poucos componentes de incerteza utilizando os métodos ANOVA. Como ressaltado em 4.3.1, muitos componentes devem ser avaliados por julgamento científico, utilizando toda a informação disponível sobre a possível variabilidade das grandezas de entrada em questão; em muitos casos, um componente de incerteza, tal como o que surge de um efeito interamostras, um efeito inter-laboratórios, um efeito inter-instrumentos ou um efeito interoperadores, não pode ser avaliado pela análise estatística de uma série de observações, mas deve ser avaliado a partir do conjunto de informações disponíveis.

H.6 Medições numa escala de referência: dureza

Dureza é um exemplo de conceito físico que não pode ser quantificado sem referência a um método de medição; ela não tem unidade que seja independente de algum método. A grandeza “dureza” é diferente das grandezas mensuráveis clássicas, pois não pode entrar em equações algébricas para definir outras grandezas mensuráveis (embora, às vezes, seja usada em equações empíricas que relacionam dureza a outra propriedade para uma categoria de materiais). Sua magnitude é determinada por uma medição convencional, a de uma dimensão linear de uma impressão em um bloco do material de interesse, ou *bloco amostra*. A medição é realizada de acordo com uma norma escrita, que inclui uma descrição do “penetrador”, da construção da máquina com a qual se aplica o penetrador, e da maneira pela qual a máquina deve ser operada. Existe mais de uma norma escrita, portanto existe mais de uma escala de dureza.

A dureza relatada é uma função (que depende da escala) da dimensão linear medida. No exemplo fornecido neste item, ela é uma função linear da média aritmética ou média das profundidades de cinco penetrações repetidas, mas, para algumas outras escalas, a função é não-linear.

Realizações da máquina padrão são conservadas como padrões nacionais (não há realização padrão internacional); uma comparação entre uma máquina em particular e a *máquina padrão nacional* é feita utilizando-se um *bloco-padrão de transferência*.

H.6.1 O problema da medição

Neste exemplo, a dureza de um bloco amostra de material é determinada na escala “Rockwell C” usando-se uma máquina que foi calibrada por comparação com a máquina padrão nacional. A unidade da escala de dureza Rockwell C é 0,002 mm, com a dureza nesta escala definida como 100×(0,002 mm) menos a média das profundidades de cinco penetrações, medidas em mm. O valor dessa grandeza dividido pela unidade da escala Rockwell, de 0,002 mm, é chamado “índice de dureza HRC”. Neste exemplo, a grandeza é chamada simplesmente “dureza”, símbolo $h_{\text{Rockwell C}}$, e o valor numérico de dureza expresso em unidades Rockwell de comprimento é chamado “índice de dureza”, com símbolo $H_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.2 Modelo matemático

À média das profundidades das penetrações realizadas no bloco amostra pela máquina utilizada para determinar sua dureza, ou *máquina de calibração*, devem ser adicionadas correções para determinar a média das profundidades das penetrações que teriam sido obtidas no mesmo bloco pela máquina padrão nacional. Assim

$$h_{\text{Rockwell C}} = f\left(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S\right) \tag{H.33a}$$

$$= 100(0{,}002 \text{ mm}) - \bar{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}/(0{,}002 \text{ mm}) \tag{H.33b}$$

onde

- $\bar{d}$ é a média das profundidades de cinco penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco amostra;
- Δ_c é a correção obtida de uma comparação da máquina de calibração com a máquina padrão nacional utilizando um bloco-padrão de transferência, igual à média das profundidades de $5m$ penetrações realizadas pela máquina padrão nacional neste bloco, menos a média das profundidades de $5n$ penetrações realizadas no mesmo bloco pela máquina de calibração;
- Δ_b é a diferença em dureza (expressa como uma diferença de profundidade média de penetração) entre as duas partes do bloco-padrão de transferência utilizadas, respectivamente, para penetrações pelas duas máquinas, suposta como sendo zero; e
- Δ_S é o erro devido à insuficiente repetibilidade da máquina padrão nacional e à definição incompleta da grandeza dureza. Embora se deva supor Δ_S igual a zero, este tem uma incerteza-padrão associada $u(\Delta_S)$.

Uma vez que as derivadas parciais $\partial f/\partial \bar{d}$, $\partial f/\partial \Delta_c$, $\partial f/\partial \Delta_b$, $\partial f/\partial \Delta_S$ da função da Equação (H.33a) são todas iguais a -1, a incerteza-padrão combinada $u_c(h)$ da dureza do bloco amostra, tal como medida pela máquina de calibração, é dada simplesmente por

$$u_c^2(h) = u^2\left(\bar{d}\right) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S) \tag{H.34}$$

onde, por simplicidade de notação, $h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.3 Variâncias contribuintes

H.6.3.1 Incerteza da profundidade média de penetração $\bar{d}$ do bloco amostra, $u\left(\bar{d}\right)$

Incerteza de observações repetidas. A estrita repetição de uma observação não é possível porque uma nova impressão não pode ser feita no mesmo local em que foi feita uma anterior. Uma vez que cada impressão deve ser feita em um lugar diferente, qualquer variação nos resultados inclui o efeito de variações de dureza entre locais diferentes. Assim, $u\left(\bar{d}\right)$, a incerteza-padrão da média das profundidades de cinco penetrações no bloco amostra pela máquina de calibração, é tomada como $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, onde $s_p(d_k)$ é o desvio-padrão experimental agrupado das profundidades de penetração determinadas por medições “repetidas” em um bloco cuja dureza seja conhecidamente muito uniforme (ver 4.2.4).

Incerteza da indicação. Não obstante seja nula a correção para $\bar{d}$ associada ao mostrador da máquina de calibração, há uma incerteza em $\bar{d}$ devida à incerteza da indicação de profundidade associada à resolução δ do mostrador dada por $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (ver F.2.2.1). A variância estimada de $\bar{d}$ é, assim

$$u^2\left(\bar{d}\right) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \tag{H.35}$$

H.6.3.2 Incerteza da correção para a diferença entre as duas máquinas, $u(\Delta_c)$

Como indicado em H.6.2, Δ_c é a correção para a diferença entre a máquina padrão nacional e a máquina de calibração. Essa correção pode ser expressa como $\Delta_c = z'_S - z'$ onde $z'_S = \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{z}_{S,i}\right)/m$, é a profundidade média de $5m$ penetrações realizadas pela máquina padrão nacional no bloco-padrão de transferência; e $z' = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\right)/n$ é a profundidade média de $5n$ penetrações realizadas no mesmo bloco pela máquina de calibração. Assim, supondo que, para a comparação, a incerteza devida à resolução do mostrador de cada máquina seja desprezível, a variância estimada de Δ_c é

$$u^2(\Delta_c) = \frac{[s_{\text{av}}^2(\bar{z}_S)]}{m} + \frac{[s_{\text{av}}^2(\bar{z})]}{n} \tag{H.36}$$

onde

$s_{\text{av}}^2(\bar{z}_S) = \left[\sum_{i=1}^{m} s^2\left(\bar{z}_{S,i}\right)\right]/m$ é a média das variâncias experimentais das médias de cada uma das m séries de penetrações $z_{S,ik}$ realizadas pela máquina padrão;

$s_{\text{av}}^2(\bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^{n} s^2(\bar{z}_i)\right]/n$ é a média das variâncias experimentais das médias de cada uma das n séries de penetrações z_{ik} feitas pela máquina de calibração.

NOTA As variâncias $s_{\text{av}}^2(\bar{z}_S)$ e $s_{\text{av}}^2(\bar{z})$ são estimativas agrupadas da variância — ver discussão da Equação (H.26b) em H.5.2.2.

H.6.3.3 Incerteza da correção devida a variações na dureza do bloco-padrão de transferência, $u(\Delta_b)$

A Recomendação Internacional R 12 da OIML, *Verification and Calibration of Rockwell C hardness standardized blocks* (*Verificação e calibração de blocos padronizados de dureza Rockwell C*), requer que as profundidades máxima e mínima de penetração, obtidas de cinco medições no bloco-padrão de transferência, não difiram por mais do que uma fração x da profundidade média de penetração, onde x é uma função do nível de dureza. Assim, seja xz' a diferença máxima nas profundidades de penetração sobre todo o bloco, onde z' é como definido em H.6.3.2, com $n = 5$. Adicionalmente, suponha-se que essa diferença máxima seja descrita por uma distribuição de probabilidade triangular em torno do valor médio $xz'/2$ (na razoável hipótese de que valores próximos ao valor central são mais prováveis do que valores extremos — ver 4.3.9). Então, se $a = x\,z'/2$ na Equação (9b) em 4.3.9, a variância estimada da correção para a profundidade média de penetração devida a diferenças das durezas apresentadas pela máquina padrão e pela máquina de calibração, respectivamente, é

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \tag{H.37}$$

Conforme indicado em H.6.2, assume-se que a melhor estimativa da correção Δ_b seja, ela mesma, zero.

H.6.3.4 Incerteza da máquina padrão nacional e da definição de dureza, $u(\Delta_S)$

A incerteza da máquina padrão nacional, juntamente com a incerteza devida à definição incompleta da grandeza dureza, é relatada como um desvio-padrão estimado $u(\Delta_S)$ (uma grandeza de dimensão *comprimento*).

H.6.4 A incerteza-padrão combinada, $u_c(h)$

A reunião dos termos individuais discutidos de H.6.3.1 a H.6.3.4 e sua substituição na equação (H.34) permite obter a variância estimada da medição de dureza como

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{\text{av}}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{\text{av}}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \tag{H.38}$$

sendo $u_c(h)$ a incerteza-padrão combinada.

H.6.5 Exemplo numérico

Os dados para este exemplo estão resumidos na Tabela H.10.

Tabela H.10 — Resumo de dados para a determinação da dureza de um bloco amostra na escala Rockwell C

Fonte de incerteza	Valor
Profundidade média $\bar{d}$ de 5 penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco amostra: 0,072 mm	36,0 unidade de escala Rockwell
Índice de dureza indicado no bloco amostra a partir de 5 penetrações: $H_{\text{Rockwell C}}=h_{\text{Rockwell C}}/(0{,}002\ \text{mm})=[100(0{,}002\ \text{mm}) - 0{,}072\ \text{mm}]/(0{,}002\ \text{mm})$ (ver H.6.1)	64,0 HRC
Desvio padrão experimental agrupado $s_{\text{p}}(d_{\text{k}})$ das profundidades de penetrações realizadas pela máquina de calibração em um bloco tendo dureza uniforme	0,45 unidade de escala Rockwell
Resolução δ do mostrador da máquina de calibração	0,1 unidade de escala Rockwell
$s_{\text{av}}(\bar{z}_S)$, raiz quadrada da média das variâncias experimentais das médias de m séries de penetrações realizadas pela máquina padrão nacional no bloco padrão de transferência	0,10 unidade de escala Rockwell, m=6
$s_{\text{av}}(\bar{z})$, raiz quadrada da média das variâncias experimentais das médias de n séries de penetrações realizadas pela máquina de calibração no bloco padrão de transferência	0,11 unidade de escala Rockwell, n=6
Variação fracional permitida x da profundidade de penetração no bloco padrão de transferência	$1{,}5 \times 10^{-2}$
Incerteza padrão $u(\Delta_S)$ da máquina padrão nacional e definição de dureza	0,5 unidade de escala Rockwell

A escala é Rockwell C, designada como HRC. A unidade da escala Rockwell é 0,002 mm, e, assim, na Tabela H.10 e no que se segue, subentende-se que (por exemplo) "36,0 unidade de escala Rockwell" significa $36{,}0 \times (0{,}002\ \text{mm}) = 0{,}072\ \text{mm}$, simplesmente uma maneira conveniente de expressar os dados e resultados.

Se os valores para as grandezas relevantes fornecidos na Tabela H.10 são substituídos na Equação (H.38), obtêm-se as duas expressões seguintes:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} + \frac{(0{,}015 \times 36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2\right] \text{(unidade de escala Rockwell)}^2$$

$$= 0{,}307 \text{ (unidade de escala Rockwell)}^2$$

$$u_c(h) = 0{,}55 \text{ unidade de escala Rockwell} = 0{,}001\,1 \text{ mm}$$

onde, para fins de cálculo da incerteza, é adequado tomar $z' = \bar{d} = 36{,}0$ unidade de escala Rockwell.

Assim, supondo-se que $\Delta_c = 0$, a dureza do bloco amostra é

$h_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ unidade de escala Rockwell ou 0,128 0 mm, com uma incerteza-padrão combinada de $u_c = 0{,}55$ unidade de escala Rockwell ou 0,001 1 mm.

O índice de dureza do bloco é $h_{Rockwell\ C}/(0{,}002\ \text{mm}) = (0{,}128\,0\ \text{mm})/(0{,}002\ \text{mm})$, ou

$H_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ HRC, com uma incerteza-padrão combinada de $u_c = 0{,}55$ HRC.

Além do componente de incerteza devido à máquina padrão nacional e à definição de dureza, $u(\Delta_S) =$ 0,5 unidade de escala Rockwell, os componentes significativos de incerteza são aqueles oriundos da repetibilidade da máquina, $s_p(d_k)/\sqrt{5} =$ 0,20 unidade de escala Rockwell; e da variação da dureza do bloco-padrão de transferência, que é $(xz')^2/24 =$ 0,11 unidade de escala Rockwell. O número efetivo de graus de liberdade de u_c pode ser avaliado usando-se a fórmula de Welch-Satterthwaite, como ilustrado em H.1.6.

Anexo J*

Glossário dos principais símbolos

a	meia largura de uma distribuição retangular de possíveis valores de uma grandeza de entrada X_i: $$a = (a_+ - a_-)/2$$
a_+	fronteira superior, ou limite superior, de uma grandeza de entrada X_i.
a_-	fronteira inferior, ou limite inferior, de uma grandeza de entrada X_i.
b_+	fronteira superior, ou limite superior, do desvio de uma grandeza de entrada X_i em relação a sua estimativa x_i: $$b_+ = a_+ - x_i$$
b_-	fronteira inferior, ou limite inferior, do desvio de uma grandeza de entrada X_i em relação a sua estimativa x_i: $$b_- = x_i - a_-$$
c_i	derivada parcial ou coeficiente de sensibilidade: $$c_i \equiv \partial f / \partial x_i$$
f	relação funcional entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende, e entre a estimativa de saída y e as estimativas de entrada x_i das quais y depende
$\partial f/\partial x_i$	derivada parcial, com relação à grandeza de entrada X_i, da relação funcional f entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende, avaliadas com estimativas x_i para os X_i: $$\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i \big\vert_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$
k	fator de abrangência usado para calcular a incerteza expandida $U = ku_c(y)$ da estimativa de saída y a partir de sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, onde U define um intervalo $Y = y \pm U$, tendo um alto nível da confiança
k_p	fator de abrangência usado para calcular a incerteza expandida $U_p = k_p u_c(y)$ da estimativa de saída y a partir de sua incerteza-padrão combinada $u_c(y)$, onde U_p define um intervalo $Y = y \pm U_p$, tendo um alto e especificado nível da confiança p
n	número de observações repetidas
N	número de grandezas de entrada X_i das quais depende o mensurando Y
p	probabilidade; nível da confiança: $$0 \le p \le 1$$
q	grandeza que varia aleatoriamente, descrita por uma distribuição de probabilidade
$\bar{q}$	média aritmética, média amostral ou média de n observações repetidas independentes q_k de uma grandeza q que varia aleatoriamente
	estimativa da esperança ou média μ_q da distribuição de probabilidade de q

(*) **Nota de rodapé para a versão 2008:**

Quando o GUM foi publicado pela primeira vez havia uma regra editorial ativa que vedava o uso de um Anexo I. É por isso que letra J é usada para nomear este anexo em sequência ao anexo H.

q_k	*k*-ésima observação repetida independente de uma grandeza q que varia aleatoriamente
$r(x_i, x_j)$	coeficiente de correlação estimado associado às estimativas de entrada x_i e x_j que estimam as grandezas de entrada X_i e X_j: $r(xi, xj) = u(x_i, x_j)/[u(x_i)u(x_j)]$
$r(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$	coeficiente de correlação estimado das médias de entrada $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_j$, determinado a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas $X_{i,k}$ e $X_{j,k}$ de X_i e X_j: $r(\bar{X}_i, \bar{X}_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)/[s(\bar{X}_i)s(\bar{X}_j)]$
$r(y_i, y_j)$	coeficiente de correlação estimado associado às estimativas de saída y_i e y_j quando dois ou mais mensurandos ou grandezas de saída são determinados na mesma medição
s_p^2	estimativa combinada ou agrupada da variância
s_p	desvio-padrão experimental agrupado, igual à raiz quadrada positiva de s_p^2
$s^2(\bar{q})$	variância experimental da média $\bar{q}$
	estimativa da variância σ^2/n de $\bar{q}$: $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
	variância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A
$s(\bar{q})$	desvio-padrão experimental da média $\bar{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\bar{q})$
	estimador tendencioso de $s(\bar{q})$ (ver C.2.21, nota)
	incerteza-padrão obtida de uma avaliação do Tipo A
$s^2(q_k)$	variância experimental determinada a partir de n observações independentes repetidas q_k de q.
	estimativa da variância σ^2 da distribuição de probabilidade de q
$s(q_k)$	desvio-padrão experimental, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(q_k)$
	estimador tendencioso do desvio-padrão σ da distribuição de probabilidade de q
$s^2(\bar{X}_i)$	variância experimental da média de entrada $\bar{X}_i$, determinada a partir de n observações independentes repetidas $X_{j,k}$ de X_i
	variância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A
$s(\bar{X}_i)$	desvio-padrão experimental da média de entrada $\bar{X}_i$, igual à raiz quadrada positiva de $s^2(\bar{X}_i)$
	incerteza-padrão obtida de uma avaliação do Tipo A
$s(\bar{q}, \bar{r})$	estimativa da covariância das médias $\bar{q}$ e $\bar{r}$ que estimam as esperanças μ_q e μ_r de duas grandezas aleatórias q e r, determinada a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas q_k e r_k de q e r
	covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A
$s(\bar{X}_i \bar{X}_j)$	estimativa da covariância das médias de entrada $\bar{X}_i$ e $\bar{X}_j$, determinada a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas $X_{i,k}$ e $X_{j,k}$ de X_i e X_j
	covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A

$t_p(\nu)$	fator-*t* da distribuição-*t* para ν graus de liberdade correspondentes a uma determinada probabilidade p
$t_p(\nu_{\text{eff}})$	fator-*t* da distribuição-*t* para ν_{eff} graus de liberdade correspondentes a uma determinada probabilidade p, usado para calcular uma incerteza expandida U_{p}
$u^2(x_i)$	variância estimada associada com a estimativa de entrada x_{i} que estima a grandeza de entrada X_{i} NOTA Quando x_{i} é determinada pela média aritmética ou média amostral de n observações independentes repetidas, $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ é uma variância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A
$u(x_i)$	incerteza-padrão da estimativa de entrada x_{i} que estima a grandeza de entrada X_{i}, igual à raiz quadrada positiva de $u^2(x_i)$ NOTA Quando x_{i} é determinada pela média aritmética ou média amostral de n observações independentes repetidas, $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ é uma incerteza-padrão obtida de uma avaliação do Tipo A
$u(x_i, x_j)$	covariância estimada associada com duas estimativas de entrada x_{i} e x_{j} que estimam as grandezas de entrada X_{i} e X_{j} NOTA Quando x_{i} e x_{j} são determinadas a partir de n pares independentes de observações simultâneas repetidas, $u(x_i, x_j) = s(\bar{X}_i, \bar{X}_j)$ é uma covariância estimada obtida de uma avaliação do Tipo A
$u_c^2(y)$	variância combinada associada à estimativa de saída y
$u_c(y)$	incerteza-padrão combinada da estimativa de saída y, igual à raiz quadrada positiva de $u_c^2(y)$
$u_{cA}(y)$	incerteza-padrão combinada da estimativa de saída y determinada a partir de incertezas-padrão e covariâncias estimadas obtidas de avaliações do Tipo A apenas
$u_{cB}(y)$	incerteza-padrão combinada da estimativa de saída y determinada a partir de incertezas-padrão e covariâncias estimadas obtidas de avaliações do Tipo B apenas
$u_c(y_i)$	Incerteza-padrão combinada da estimativa de saída y_{i} quando dois ou mais mensurandos ou grandezas de saída são determinados na mesma medição
$u_i^2(y)$	componente da variância combinada $u_c^2(y)$ associado com a estimativa de saída y gerado pela variância estimada $u^2(x_i)$ associada com a estimativa de entrada x_{i}: $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$
$u_i(y)$	componente da incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ da estimativa de saída y gerado pela incerteza-padrão da estimativa de entrada x_{i}: $u_i(y) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$
$u(y_i, y_j)$	covariância estimada associada às estimativas de saída y_{i} e y_{j} determinadas na mesma de medição
$u(x_i)/\lvert x_i \rvert$	incerteza-padrão relativa da estimativa de entrada x_{i}
$u_c(y)/\lvert y \rvert$	incerteza-padrão combinada relativa da estimativa de saída y
$[u(x_i)/\lvert x_i \rvert]^2$	variância relativa estimada associada à estimativa de entrada x_{i}
$[u_c(y)/y]^2$	variância combinada relativa associada à estimativa de saída y
$\dfrac{u(x_i, x_j)}{\lvert x_i x_j \rvert}$	covariância relativa estimada associada às estimativas de entrada x_{i} e x_{j}

U	incerteza expandida da estimativa de saída y que define um intervalo $Y = y \pm U$ tendo um alto nível da confiança, igual ao fator de abrangência k vezes a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ de y: $U = ku_c(y)$
U_p	incerteza expandida da estimativa de saída y que define um intervalo $Y = y \pm U_p$ tendo um alto e específico nível da confiança p, igual ao fator de abrangência k_p vezes a incerteza-padrão combinada $u_c(y)$ de y: $U_p = k_p u_c(y)$
x_i	estimativa da grandeza de entrada X_i NOTA Quando x_i é determinada pela média aritmética ou média amostral de n observações repetidas independentes, $x_i = \bar{X}_i$
X_i	*i*-ésima grandeza de entrada da qual depende o mensurando Y NOTA X_i pode ser a grandeza física ou a variável aleatória (ver 4.1.1, Nota 1)
$\bar{X}_i$	estimativa do valor da grandeza de entrada X_i, igual à média aritmética ou média amostral (ou média) de n observações repetidas independentes $X_{i,k}$ de X_i
$X_{i,k}$	*k*-ésima observação repetida independente de X_i
y	estimativa de um mensurando Y
	resultado de uma medição
	estimativa de saída
y_i	estimativa de um mensurando Y_i quando dois ou mais mensurandos são determinados na mesma medição
Y	um mensurando
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	incerteza relativa estimada da incerteza-padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada x_i
μ_q	esperança ou média da distribuição de probabilidade de uma grandeza q que varia aleatoriamente
ν	número de graus de liberdade (geral)
ν_i	número de graus de liberdade, ou número efetivo de graus de liberdade, da incerteza-padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada x_i
ν_{eff}	número efetivo de graus de liberdade de $u_c(y)$, usado para obter $t_p(\nu_{eff})$ para calcular a incerteza expandida U_p
ν_{effA}	número efetivo de graus de liberdade de uma incerteza-padrão combinada determinada a partir de incertezas-padrão do Tipo A apenas
ν_{effB}	número efetivo de graus de liberdade de uma incerteza-padrão combinada determinada a partir de incertezas-padrão do Tipo B apenas
σ^2	variância de uma distribuição de probabilidade de (por exemplo) uma grandeza q que varia aleatoriamente, estimada por $s^2(q_k)$
σ	desvio-padrão de uma distribuição de probabilidade, igual à raiz quadrada positiva de σ^2
	$s(q_k)$ é um estimador tendencioso de σ

$\sigma^2(\bar{q})$	variância de $\bar{q}$, igual a σ^2/n, estimado por $s^2(\bar{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\bar{q})$	desvio-padrão de $\bar{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $\sigma^2(\bar{q})$
	$s(\bar{q})$ é um estimador tendencioso de $\sigma(\bar{q})$
$\sigma^2[s(\bar{q})]$	variância do desvio-padrão experimental $s(\bar{q})$ de $\bar{q}$
$\sigma[s(\bar{q})]$	desvio-padrão do desvio-padrão experimental $s(\bar{q})$ de $\bar{q}$, igual à raiz quadrada positiva de $\sigma^2[s(\bar{q})]$

Bibliografia

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1-C30 (em francês); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. Intl. Poids et Mesures (Sèvres, France) (in English)

[2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12 (em francês); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73 -74 (in English)

NOTA A tradução inglesa da Recomendação INC-1-(1980) dada na Introdução deste Guia (ver 0.7) refere-se à versão final da Recomendação e foi extraída de um relatório interno do BIPM. Ela é consistente com o texto oficial em francês da Recomendação dada no *Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, do BIPM, e reproduzido em A.1, Anexo A deste Guia. A tradução inglesa da Recomendação INC-1-(1980) dada na revista Metrologia 17 refere-se a uma minuta e difere levemente da tradução dada no relatório interno do BIPM (reproduzida em 0.7).

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, 8-9, 26 (in French); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43-44 (in English)

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35 (in French); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49-50 (in English)

[5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods — Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland)

NOTA Esta norma está presentemente * sendo revista. A revisão tem um novo título, "Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results", e é composta de seis partes.

[6] *International vocabulary of basic and general terms in metrology*, second edition, 1993**, International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland)

The abbreviation of the title of this vocabulary is VIM.

NOTA 1 As definições dos termos dados no Anexo B são extraídas do texto inglês revisado do VIM na sua forma final antes da publicação.

NOTA 2 A segunda edição do VIM foi publicada pela Organização Internacional para a Normalização (ISO) em nome das seguintes sete organizações que participaram do trabalho do Grupo Consultivo sobre Metrologia 4 (TAG 4), o grupo que deu suporte ao desenvolvimento do VIM: o Birô internacional de Pesos e Medidas (BIPM), a Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC), a Federação Internacional de Química Clínica (IFCC), a ISO, a União Internacional de Química Pura e Aplicada (IUPAC), a União Internacional de Física Pura e Aplicada (IUPAP), e a Organização Internacional de Metrologia Lega (OIML).

NOTA 3 A primeira edição do VIM foi publicada pela ISO em 1984 em nome do BIPM, IEC, ISSO e OIML.

---

* **Nota de rodapé para a versão 2008:**

O documento ISO 5725:1986 foi substituído por uma série composta de seis partes. Esta série ISO 5725 é constituída pelas partes seguintes, sob o título geral *Accuracy (trueness and precision) of measurement methods and results*:

Part 1: General principles and definitions
Part 2: Basic method for the determination of repeatability and reproducibility of a standard measurement method
Part 3: Intermediate measures of the precision of a standard measurement method
Part 4: Basic methods for the determination of the trueness of a standard measurement method
Part 5: Alternative methods for the determination of the precision of a standard measurement method
Part 6: Use in practice of accuracy values

** **Nota de rodapé para a versão 2008:**

A terceira edição do vocabulário foi publicada em 2008, sob o título JCGM 200:2008, *International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)*.

[7] ISO 3534-1:1993, * *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms*, International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland)

[8] *FULLER*, W.A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N.Y.)

[9] *ALLAN*, D.W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646-654

[10] *DIETRICH*, C.F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, second edition, Adam-Hilger (Bristol)

[11] *MÜLLER*, J.W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241-251

[12] *MÜLLER*, J.W. (1984), in *Precision measurement and fundamental constants II*, Taylor, B. N., and Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.), 375-381

[13 *JEFFREYS*, H. (1983), *Theory of probability*, third edition, Oxford University Press (Oxford)

[14] *PRESS*, S.J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.)

[15] BOX, G.E.P., *HUNTER*, W.G., and HUNTER, J.S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.)

[16] *WELCH*, B.L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29-48; (1938), *Biometrika* **29**, 350-362; (1947), *ibid.* **34**, 28-35

[17] *FAIRFIELD*-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australia)* **9**(3), 211

[18] *SATTERTHWAITE*, F.E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309-316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110-114

[19] *ISO* Guide 35:1989, ** *Certification of reference materials — General and statistical principles*, second edition, International Organization for Standardization (Geneva, Switzerland)

[20] *BARKER*, T.B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N.Y.)

* **Footnote to the 2008 version:**

O documento ISO 3534-1:2006 cancela e substitui o anterior ISO 3534-1:1993. Note-se que alguns termos e definições foram revisados. Para informações adicionais, consultar a última edição.

** **Footnote to the 2008 version:**

O documento ISO Guide 35:2006 cancela e substitui o anterior ISO Guide 35:1989. Para informações adicionais, consultar a última edição.

** **Nota dos tradutores**

A terceira edição do vocabulário em português foi publicada no Brasil em 2009, sob o título JCGM 200:2008, *Vocabulário Internacional de Metrologia – Conceitos Fundamentais e Gerais e Termos Associados (VIM 2008)*. Uma publicação unificada Brasil-Portugal, em substituição a esta publicação de 2009, está presentemente (2012) em processo editorial de publicação pelo Inmetro. Informalmente, o título é em geral abreviado para VIM 2008.

Índice alfabético — Inglês

E

F

H

I

Índice Alfabético — Português

L

M

N

O

P

R

S

T

U

V

W